This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

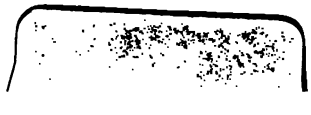
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



MANUEL

D'UN

COURS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL.

MANUEL

D'UN COURS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL,

PAR

A. MEYER.

LIÉGE,

H. DESSAIN, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

PLACE St.-LAMBERT, Nos 9-28.

1855.

182. a. 19.

AVANT-PROPOS.

Quand on désigne par dx un accroissement arbitraire de la variable x de la fonction $y = fx$, on sait, qu'en développant la différence $f(x+dx) - fx$, on obtient une expression de la forme

$$f(x+dx) - fx = f'x \cdot dx + dx^2 \cdot P.$$

Si l'on fait ensuite $dy = f'x \cdot dx$, (1)

Les deux quantités dy, dx, qu'on nomme les différentielles de y et de x, seront indéterminées, puisqu'il n'existe qu'une seule équation entre ces inconnues.

Si donc on pose $dx = \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$

on obtiendra, pour dy des valeurs correspondantes, que je désignerai par $dy = \beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$.

et l'on aura les systèmes de valeurs correspondantes

$$dx = \alpha,\ dx = \alpha_1,\ \text{etc.},$$
$$dy = \beta,\ dy = \beta_1,\ \text{etc.},$$

en nombres infinis, qui tous satisferont à l'équation (1).

Mais outre ces systèmes de quantités finies, et différentes de zéro, on a encore le système

$$dx = 0,$$
$$dy = 0,$$

qui satisfait pareillement à l'équation (1).

Le calcul différentiel, en tant qu'il s'applique aux fonctions d'une seule variable, telle que $y = fx$, a pour objet de chercher, par des règles sûres, la valeur déterminée $f'x$, du rapport $\frac{dy}{dx}$, et d'en déduire la valeur indéterminée de dy, correspondante à une valeur de dx, prise arbitrairement.

Mais on a évidemment :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = f'x\ ;$$

donc quand on connaîtra la valeur $f'x$ du rapport $\frac{dy}{dx}$, correspondante au système de valeurs $dx = 0$, $dy = 0$, on connaîtra également ce rapport pour tous les autres systèmes de valeurs correspondantes de dx, dy.

Nous chercherons dans cet ouvrage la valeur de $f'x$, pour les diverses sortes de fonctions, en faisant constamment $dx = 0$, $dy = 0$. Quand nous aurons trouvé, dans cette hypothèse, la valeur $f'x$, nous rendrons à $\frac{dy}{dx}$, par la pensée, sa signification propre, et aux différentielles $dx, dy = f'x \cdot dx$, leurs valeurs multiples. Soit, par exemple, $y = x^2$; on aura $(x+dx)^2 - x^2 = 2x \cdot dx + dx^2$. dx étant quelconque, on fera $dy = 2xdx$, $\frac{dy}{dx} = 2x$. Mais si dans l'expression $\frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = 2x + dx$, nous faisons $dx = 0$, d'où $dy = 0$, nous obtiendrons $f'x = 2x$; on a donc aussi $\frac{dy}{dx} = 2x$, quelques soient dx et dy.

Quoique dx et dy aient, dans nos calculs, constamment zéro pour valeurs, cette hypothèse n'empêchera pas que ces calculs ne puis-

sent se faire algébriquement entre les signes dx, dy, puisqu'ils n'auront lieu que par indications d'opération, et que des opérations purement algébriques, telles que $dx+dy=0+0$, $dx-dy=0-0$, $dx\cdot dy=0\cdot 0$, $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$, etc., pourront toujours s'effectuer.

Le principal avantage attaché à cette méthode consiste en ce que nous obtiendrons les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, et de dy, par une règle simple et uniforme. De plus, nous n'aurons besoin de recourir ni au binôme de Newton, ni aux autres développements en séries, et les notions de l'Algèbre la plus élémentaire nous suffiront. On pourrait même se passer des développements de $\sin(a\pm b)$, $\cos(a\pm b)$, comme on le fait voir dans une note, placée à la fin de cet ouvrage.

Soient $y=fx$, et $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x}$; la plupart des applications du calcul différentiel conduisent à des équations de la forme

$$\frac{dy}{dx}+\Delta x\cdot T=\varphi x+\Delta x\cdot Q, \quad (2)$$

$\frac{dy}{dx}$, et φx étant indépendants de Δx. On pourrait donc conclure immédiatement $\frac{dy}{dx}=\varphi x$, (3), dy et dx étant quelconques. Néanmoins nous déduirons constamment l'équation (3) de l'équation (2), en posant dans celle-ci $\Delta x=dx=0$, ce qui donnera aussi $\Delta y=dy=0$, et $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}=\varphi x$. Ceci est permis d'après les considérations qui précèdent, et ce procédé aura l'avantage de déduire l'équation (2) de l'équation (3) par un *calcul* uniforme, savoir en posant $\Delta x=0$, ce qui fera disparaître les termes en P et en Q.

Remarquons encore qu'en désignant par x_1 l'une quelconque des valeurs comprises depuis x jusqu'à $x+\Delta x$, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, qui est évidemment soumis à une loi, à cause de l'équation primitive $y=fx$, sera une fonction de x_1, et l'on pourra écrire $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\varphi x_1$. Cette valeur φx_1, différera en général selon les valeurs de x_1, et parmi toutes ces valeurs différentes de φx_1, correspondantes aux valeurs de x_1 comprises dans l'intervalle de x à $x+\Delta x$, il y en aura une qui sera la plus grande de toutes, et une autre qui en sera la plus petite.

Donnons maintenant un aperçu des diverses définitions qu'ont donné les auteurs des différentielles dx et dy.

Méthode d'Euler.

Euler fait $dx=0$, $dy=0$, ce qui est exacte, mais n'est pas suffisant, car dx et dy ont des valeurs quelconques.

Méthode des Limites (de d'Alembert, L'Huillier, Cauchy, etc.)

Dans cette méthode on a :

$$\frac{dy}{dx} = \lim \cdot \frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x}$$
$$= \lim [f'x + \Delta x \cdot P]$$
$$= f'x.$$

Donc cette équation suppose aussi que l'on ait $\Delta x = dx = 0$, et partant $dy = 0$.

Méthode infinitésimale (de Leibnitz, etc.)

Leibnitz regarde dx comme un infiniment petit constant, dy comme un infiniment petit variable. Qu'est-ce qu'un infiniment petit? On ne le sait pas; seulement on dit qu'il y a des infiniment petits de divers ordres, et que les infiniment petits d'ordres supérieurs disparaissent vis-à-vis des infiniment petits d'ordres inférieurs. Dans ce système on écrit $\frac{dy}{dx} = f'x + dx \cdot P = f'x$. Cette équation est absurde, puisque dx n'est pas nul, quoique infiniment petit. L'équation $f'x + dx \cdot P = f'x$, n'est pas même vraie approximativement, car $f'x$ doit être une valeur exacte.

Méthode des évanouissants.

Quelques auteurs considèrent dx et dy comme des quantités non nulles, mais prises au moment où elles s'évanouissent. Cette Méthode ne diffère que de nom de la Méthode des infiniment petits, et se prête aux mêmes objections.

Méthode des dérivations (de Lagrange).

Lagrange désigne par y' la quantité $\frac{dy}{dx}$; il dit que y' est toujours une quantité finie, et apprend à la former dans chaque cas, ainsi que les dérivées supérieures, en les considérant comme les coëfficients du développement de $f(x+h)$. Cet auteur ne définit nulle part la valeur de dx, et par conséquent on ignore également ce que c'est que dy. Poussé par le besoin, il regarde, par ci par là, dx comme une grandeur plus petite que toute grandeur donnée ; mais alors dx est nul, car zéro jouit seul de la propriété d'être plus petit que toute grandeur donnée.

Méthode des fluxions (de Newton).

Newton, guidé par des considérations de mouvement, trouve

$$\frac{dy}{dx} = f'x \cdot + dx \cdot P = f'x.$$

Il représente dx par la lettre 0, et est obligé de descendre jusqu'à la dernière raison, pour faire disparaître $dx \cdot P$, c'est-à-dire décrire

$$\lim \cdot [f'x + dx \cdot P] = f'x ;$$

ce qui suppose $dx = 0$. Newton nomme fluxion la quantité $f'x$, et il appelle moment la différentielle dy ; la fonction primitive $y = fx$, a reçu de lui le nom de fluente.

L'on voit donc, qu'en résumé, ces diverses méthodes se réduisent à deux conceptions principales : à la définition d'Euler, savoir $dy = 0$, $dx = 0$, et à la méthode des infiniment petits, qui se sert dans ses déductions d'un principe absurde.

Méthode de M. Lamarle. (*Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante.* Liége, chez Mr. Dessain, 1842).

D'après cette Méthode, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se partage en deux parties : la première, indépendante de Δx, qu'on désigne par $f'x$, et la seconde variant avec Δx, et qu'on représente par η. On a donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'x + \eta.$$

M. Lamarle définit ensuite la différentielle dy par l'équation

$$dy = f'x \cdot \Delta x.$$

Cette définition est exacte, et cet auteur doit être regardé comme ayant donné le premier, la vraie notion de la différentielle.

PRÉFACE.

J'ai tâché de rendre ces éléments indépendants de la méthode des fluxions, des infiniment petits, des évanouissants, de celles des dérivations et des limites. On sait, en effet, qu'aucune de ces méthodes ne satisfait complètement l'esprit : les unes donnent des résultats contradictoires, les autres manquent de rigueur, ou reposent sur des raisonnements vagues, et conduisent à des calculs longs et prolixes.

Celle que j'ai adoptée, et que je regarde comme la seule méthode vraie, a le double avantage de donner au Calcul différentiel l'évidence de l'Algèbre, et de conduire aux résultats par la voie la plus facile, la plus simple et la plus courte. Développer davantage tout ceci serait long et prématuré, c'est à la lecture de l'ouvrage d'en amener la conviction. J'ai préféré donner dès à présent, le résumé des formules dans lesquelles les Calculs différentiel et intégral sont concentrés, afin que le lecteur instruit saisisse le véritable esprit de ces calculs, et que l'élève sache quels sont les principes auxquels il doit le plus s'attacher, comme constituant la base de tout l'édifice.

I.

RÉSUMÉ DES FORMULES FONDAMENTALES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Notations et définitions. $y = fx$,

$$1. \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - fx,$$

$$2. \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x}.$$

Le calcul différentiel s'occupe à déterminer la valeur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand on pose $\Delta x = 0$, après le développement de $f(x+\Delta x) - fx$.

Pour désigner qu'après ce développement, il faut faire $\Delta x = 0$, on change, avant le développement, Δ en d, on développe, puis on réduit; ces opérations sont indiquées par la formule

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-fx}{dx}.$$

Donc, le calcul différentiel a pour objet de chercher la valeur de $\frac{dy}{dx}$, et d'en déduire celle de dy. On nomme *coëfficient différentiel* l'expression $\frac{dy}{dx}$; ce rapport a, en général, une valeur différente de zéro, que l'on désigne par $f'x$, et qu'on nomme la dérivée de fx. On appelle dy et dx respectivement les différentielles de x et de y. Ces différentielles ont une valeur nominale, et une valeur réelle, celle-ci est donnée par les relations

$$4. \quad \begin{cases} dx = 0, \\ dy = 0. \end{cases}$$

La valeur nominale consiste dans les notations dx, dy, savoir :

$$5. \quad \begin{cases} dx = dx, \\ dy = f'x\,dx. \end{cases}$$

Celle-ci est nécessaire pour indiquer l'opération par laquelle on trouve $f'x$, et pour remonter de $dy = dfx = f'x\,dx$, à la fonction primitive $y = fx$.

Les formules fondamentales du calcul différentiel sont de trois espèces, savoir : 1° Formules pour le développement de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, Δx restant quelconque;

2° Formules pour le développement de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, Δx devant être égalé à zéro après le développement;

3° Formules qui se rapportent à la réduction des valeurs de $\frac{dy}{dx}$, et de dy après le développement de $f(x+dx)-fx$.

(1).

Formules pour le développement de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, Δx *restant quelconque.*

6. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\varphi(x+\alpha\Delta x)$, $0<\alpha<1$.

7. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\varphi x+\Delta x\cdot\xi x$, $\xi x=\varphi_1(x+\alpha_1\Delta x)$, $0<\alpha_1<1$.

Mais $\varphi x=f'x=\frac{dy}{dx}$, donc

8. $$\begin{cases} \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'x+\frac{1}{2}\Delta x\cdot\xi x, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}+\Delta x\cdot\xi x. \end{cases}$$

On peut concevoir Δx assez petit pour que l'on ait

9. $$\begin{cases} \varphi x+\Delta x\cdot\xi x>0, & \text{quand } \varphi x>0, \\ \varphi x+\Delta x\cdot\xi x<0, & \text{quand } \varphi x<0. \end{cases}$$

(2).

FORMULES POUR LE DÉVELOPPEMENT DE $\frac{dy}{dx}$, OU DE $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, Δx DEVENANT ZÉRO APRÈS LE DÉVELOPPEMENT.

a) *Formules pour le coëfficient différentiel.* (On change dans 8, Δ en d).

Remarque. Comme $df x=dx\cdot f'x$, on peut poser $dx\cdot\xi x=d\psi x$.

10. $$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=f'x+dx\cdot\xi x, \\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}+dx\cdot\xi x, \\ \frac{dy}{dx}=\frac{df x}{dx}+d\psi x. \end{cases}$$

b) *Formules pour la différentielle.* (On chasse dans 10, le dénominateur dx).

11. $$\begin{cases} dy=f'x dx+dx^2;x, \\ dy=dy+dx^2\xi x, \\ dy=df x+d\psi x. \end{cases}$$

c) Formule pour la comparaison.

12. L'équation $\frac{d\eta}{dx} + \Delta x . \xi x = \frac{dy}{dx} + \Delta x . \psi x$, entraîne la suivante $\frac{d\eta}{dx} = \frac{dy}{dx}$.

(3).

FORMULES POUR LA RÉDUCTION APRÈS LE DÉVELOPPEMENT IMMÉDIAT DE $f(x+dx) - fx$.

a) Formules de réduction pour le coëfficient différentiel.

13.
$$\begin{cases} f'x + dx . \xi x = f'x, \\ \frac{dy}{dx} + dx . \xi x = \frac{dy}{dx}, \\ \frac{df x}{dx} + d\psi x = \frac{df x}{dx}. \end{cases}$$

b) Formules de réduction pour la différentielle.

14.
$$\begin{cases} f'x\,dx + dx^2 \xi x = f'x dx, \\ dy + dx^2 \xi x = dy, \\ df x + d\,d\psi x = df x. \end{cases}$$

15. Si $n = \frac{h}{0} = \frac{h}{dx}$, on peut poser $ndx = h$.

(4).

RÈGLE GÉNÉRALE POUR LA FORMATION DES DÉRIVÉES ET DES DIFFÉRENTIELLES.

a) Pour les dérivées.

16.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - fx}{dx} = f'x + dx . \xi x, \\ \qquad\qquad\qquad = f'x. \end{cases}$$

RÈGLE. *On développe* $f(x+dx) - fx$, *on divise par* dx, *on supprime les termes multipliés par* dx.

b) Pour la différentielle.

17.
$$\begin{cases} dy = df x = f'x\,dx + dx^2 . \xi x, \\ \qquad\quad = f'x dx \\ dy \qquad = df x + d(d\psi x), \\ \qquad\quad = df x. \end{cases}$$

1re RÈGLE. *On développe* $f(x+dx)-fx$, *on supprime les termes multipliés par* dx^2, *ou les termes qui sont les différentielles de différentielles.*

2e RÈGLE. *On multiplie la dérivée par* dx.

Remarque. De

$$18.\quad \begin{cases} dy = df x = f(x+dx) - fx, \text{ on déduit} \\ f(x+dx) = fx + df x. \end{cases}$$

RÈGLE. *La fonction variée* $f(x+dx)$ *est égale à la fonction primitive, plus sa différentielle.*

II.

RÉSUMÉ DES FORMULES FONDAMENTALES DU CALCUL INTÉGRAL.

(1).

Formules pour les intégrales définies.

Si dans

$$\frac{f(x+pdx)-f(x+\overline{p-1}\,dx)}{dx} = f'(x+\overline{p-1}\,dx) = \frac{df(x+\overline{p-1}\,dx)}{dx},$$

1° on pose $p = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$,

2° on ajoute les équations résultantes,

3° on chasse le dénominateur dx,

4° on fait $ndx = h$, $\overline{n-1}\cdot dx = h - dx = h$,

on obtient :

$$19.\quad \begin{cases} f(x+h)-fx = dx\{f'x + f'(x+dx) + f'(x+2dx) + \ldots \\ \qquad\qquad + f'(x+h)\}, \qquad (\alpha \\ f(x+h)-fx = df x + df(x+dx) + df(x+2dx) + \ldots \\ \qquad\qquad + df(x+h). \qquad (\beta \end{cases}$$

Notations. (a) Si dans $df x$, on change x en x, $x+dx$, $x+2dx$, $\ldots x+h$, valeurs comprises entre les limites x, $x+h$, on obtient (β. La somme (β peut donc être représentée par le signe sommatoire

$$\int_x^{x+h}$$

Donc :

$$20.\quad \begin{cases} \int_x^{x+h} df x = f(x+h) - fx, \\ \int_x^{x+h} f'x\,dx = f(x+h) - fx, \\ \int_x^{x+h} f'x\,dx = dx\,[f'x + f'(x+dx) + f'(x+2dx) + \ldots \\ \qquad\qquad + f'(x+h)]. \end{cases}$$

(b). c désignant une constante arbitraire, on a :

21. $[f(x+h)+c]-[fx+c]=f(x+h)-fx.$

Soit, pour abréger,

$$\Big[f(x+h)+c\Big]-\Big[fx+c\Big]=\Big[fx+c\Big]_x^{x+h},$$

on a :

$$22.\quad \int_x^{x+h} f'x\,dx = \int_x^{x+h} df x = \int_x^{x+h} d(fx+c) = \Big[fx+c\Big]_x^{x+h} = f(x+h)-fx.$$

(2).

Formule pour l'intégration indéfinie.

Si dans 22) on fait abstraction des limites $x, x+h$, on a :

23). $\int f'x\,dx = \int df x = \int d(fx+c) = fx+c.$

Donc les signes $\int$ et d indiquent des opérations qui se neutralisent. $\int$ est donc non-seulement un signe de sommation, mais aussi un signe d'*intégration*, opération par laquelle on remonte de la différentielle à la fonction primitive. 23) Renferme la règle générale de l'intégration :

Règle. *Mettez* f'xdx *sous la forme* dfx, *supprimez la lettre* d, *ajoutez une constante arbitraire* :

La formule 22) renferme la règle pour la sommation, ou l'intégration définie :

Règle. *Formez l'intégrale indéfinie, mettez pour* x *successivement les limites supérieure et inférieure, retranchez le second résultat du premier.*

NOUVEAUX ÉLÉMENTS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PRINCIPES ET NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Les grandeurs qui forment l'objet des Mathématiques sont les corps, les forces et la durée. On mesure les grandeurs, en les sous-divisant en parties égales, appelées unités. Les grandeurs mesurées se nomment des nombres.

Les nombres sont abstraits lorsqu'ils expriment les rapports géométriques des grandeurs à leurs unités ; et en multipliant un nombre abstrait par son unité concrète, il devient lui-même concret.

Les nombres sont spéciaux quand la quotité des unités, qui les composent, est déterminée ; ils sont, au contraire, généraux quand cette quotité reste quelconque.

Les nombres généraux se nomment des quantités.

Les nombres et les quantités sont les éléments sur lesquels s'exercent les calculs.

Le résultat d'un calcul numérique est un nombre, ou un fait, tandis que celui d'un calcul entre quantités, est une formule, ou une loi.

Les quantités sont variables ou constantes ; celles-ci ne changent jamais de valeur. Les quantités constantes forment l'objet de l'Algèbre, tandis que les quantités variables sont du domaine de l'analyse supérieure. Tous les calculs analytiques ont pour objet

la formation, la transformation et la comparaison (égalité, inégalité,) de formules, et ne sauraient consister en autre chose. Il en est de même de la Géométrie. Cette science, qui a pour objet l'étude des corps, considérés comme étendue, et par conséquent des surfaces, des lignes et du point, se rapporte uniquement à la formation, à la transformation, et à la comparaison (égalité, inégalité,) des grandeurs d'espaces et de leurs rapports.

Lorsqu'une quantité peut varier arbitrairement, on la nomme une variable *indépendante;* mais quand ses variations sont déterminées par celles d'une autre variable, elle se nomme une variable *dépendante*, ou une fonction de l'autre variable.

Le mot fonction est ordinairement remplacé par l'une des lettres f, F, φ, ψ, χ, ξ, ζ, etc.

Une fonction peut se composer de une ou de plusieurs variables, telles que

$$y = fx,\ z = f(x,y),\ u = f(x,y,z),\ \text{etc.}$$

Les variables sous le signe de la fonction, peuvent d'ailleurs être des variables indépendantes ou dépendantes.

Les fonctions se partagent en fonctions implicites et explicites. Lorsque l'équation $f(x,y,z)=0$, n'est pas résolue par rapport à z, on dit que z est une fonction implicite de x et de y. Mais, si en résolvant cette équation, on trouve

$$z = \varphi(x,y)$$

on dit que z est une fonction explicite de x et de y : il en est de même des fonctions de plus de deux variables.

L'on voit par là, que les fonctions implicites sont des formules telles que

$$\varphi(x),\ \psi(x,y),\ \xi(x,y,z),\ \text{etc.},$$

tandis que les fonctions implicites répondent à des équations,

$$\varphi(x)=0,\ \psi(x,y)=0,\ \xi(x,y,z)=0,\ \text{etc.}$$

Lorsqu'on a plusieurs équations simultanées, par exemple,

$$f_1(x,y,\ldots w)=0,\ f_2(x,y,\ldots w)=0,\ \ldots\ f_m(x,y,\ldots w)=0,$$

au nombre de m, entre $n>m$ variables, si elles ne contiennent que $n-m$ variables indépendantes, les autres, dont le nombre est $n-(n-m)$ ou m, seront les variables dépendantes ou principales; leur nombre est alors toujours égal à celui des équations.

Les fonctions sont continues ou discontinues. $y=fx$, sera une fonction continue de $x=a$, à $x=b$, $b>a$, si y conserve toujours

une valeur unique pour toutes les valeurs possibles de x, depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$.

La même fonction sera discontinue pour une valeur $x=\alpha$, prise entre a et b, si, en fesant $\varepsilon=0$, après le développement des fonctions $f(\alpha-\varepsilon)$, $f(\alpha+\varepsilon)$, on trouve deux valeurs différentes, ou bien, si la différence

$$f(\alpha-\varepsilon)-f(\alpha+\varepsilon)$$

n'est pas nulle quand on fait $\varepsilon=0$ après le développement.

En géométrie $y=fx$ ou $f(x,y)=0$, exprime une courbe plane, dont x est l'abscisse et y l'ordonnée. De même, $z=f(x,y)$ ou $f(x,y,z)=0$, est l'équation d'une surface; x, y, z sont les coordonnées de l'un quelconque de ses points.

Soit Δx, la quantité quelconque dont x varie, nous désignerons par Δy la variation correspondante de $y=f(x)$. La fonction variée sera alors

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x);$$

et l'on aura $\Delta y=f(x+\Delta x)-fx.$

Donc, *la variation d'une fonction s'obtient en retranchant la fonction primitive de la fonction variée.*

1er Théorème.

En supposant que la fonction $y=fx$ *ne cesse pas d'être continue, pendant que* x *varie d'une manière continue depuis* $x=x$ *jusqu'à* $x=x+\Delta x$, *je dis que l'on aura généralement*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\varphi(x+\alpha\Delta x),$$

α étant une fraction proprement dite indéterminée.

Démonstration. Soient φa la plus grande, φb la plus petite des valeurs qu'acquiert le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, pendant que x varie de $x=x$ à $x=x+\Delta x$, on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-\varphi a<0,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}-\varphi b>0.$$

Or, toute quantité continue qui passe du négatif au positif, devient zéro dans l'intervalle; il existe par conséquent entre $x=x$ et $x=x+\Delta x$ une valeur $x=c$, pour laquelle on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-\varphi c=0.$$

Mais en supposant que α représente une fraction indéterminée comprise entre 0 et 1, on pourra poser évidemment $c=x+\alpha\Delta x$,

ce qui fera changer l'équation précédente, en celle-ci :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(x + \alpha\Delta x).$$

Corollaire. Soit $\Delta y' = \varphi(x + \alpha\Delta x) - \varphi x$; en désignant par α_1 une fraction quelconque plus petite que l'unité, différente de la fraction α, on aura pareillement :

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \alpha\Delta x) - \varphi x}{\Delta x} = \varphi_1(x + \alpha_1\Delta x). \quad (*)$$

2e Théorème.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est équivalent à une somme de deux termes dont le premier ne s'évanouit pas avec Δx, et dont le second renferme l'accroissement Δx comme facteur.

Démonst. Je dis que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est de la forme

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi x + \xi x \cdot \Delta x.$$

Car on a
$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= fx + \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x} \cdot \Delta x. \\ &= fx + \varphi(x + \alpha\Delta x) \cdot \Delta x. \\ &= fx + \left\{ \varphi x + \frac{\varphi(x + \alpha\Delta x) - \varphi x}{\Delta x} \cdot \Delta x \right\} \Delta x. \\ &= fx + \varphi x \Delta x + \varphi_1(x + \alpha_1 \Delta x) \cdot \Delta x^2 ; \end{aligned}$$

donc $$\frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x} = \varphi x + \varphi_1(x + \alpha_1 \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Posons, pour abréger, $\xi x = \varphi_1(x + \alpha_1 \Delta x)$, on aura :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi x + \xi x \cdot \Delta x.$$

Rem. L'équation précédente, provenant d'une identité, aura lieu quelque soient x et fx, réels ou imaginaires, pourvu que la fonction fx reste continue dans l'intervalle des variations de x.

Coroll. 1. Désignons par $\frac{dy}{dx}$ ce que devient le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quand on pose $\Delta x = 0$ après le développement, c'est-à-dire posons

---

(*) $\varphi_1 m$ et $\varphi_1 n$ étant la plus grande et la plus petite valeur qu'acquiert le rapport $\frac{\Delta y'}{\Delta x}$ dans l'intervalle de x à $x + \Delta x$, on a, comme ci-dessus :

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x} - \varphi_1 m < 0, \quad \frac{\Delta y'}{\Delta x} - \varphi_1 n > 0.$$

Il existe donc une valeur $p = x + \alpha_1 \Delta x$, $0 < \alpha_1 < 1$, telle que l'on ait :

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x} - \varphi_1 p = 0.$$

$\frac{dy}{dx} = \varphi x$, on pourra écrire l'équation précédente de cette manière : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \xi x . \Delta x.$ (1

De plus, si nous représentons φx par $f'x$, on aura

$$\frac{dy}{dx} = f'x,$$

et $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'x + \xi x \cdot \Delta x. \qquad (2$$

Le rapport $\frac{dy}{dx}$, dont la valeur est $f'x$, se nomme *coëfficient différentiel* de $y = fx$, et $f'x$ se nomme la dérivée de la même fonction.

Coroll. 2. Désignons par $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_0$ ce que devient le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, lorsqu'on y pose $\Delta x = 0$ après le développement, il est clair que l'on aura : $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_0 = \frac{dy}{dx}$.

Donc, on obtient la valeur de $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_0$ si dans le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, on change Δ en d.

Mais en changeant Δ en d, l'équation (1 devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \xi x \cdot dx;$$

d'où l'on conclut $dx = 0$, ξx étant supposé fini.

Rem. $\frac{dy}{dx} = f'x$ donne $dy = f'x \cdot dx = df x$.

Donc si $f'x$ n'est pas de la forme $\frac{1}{0}$, on aura aussi $dy = 0$.

dx et dy se nomment respectivement les *différentielles* de la variable et de sa fonction.

Coroll. 3. Comme on á

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - fx,$$

on aura pareillement

$$dy = f(x + dx) - fx = df x = f'x\,dx.$$

$f(x + dx)$ se nomme la fonction *variée*, et fx la fonction *primitive*. Donc, la *différentielle d'une fonction est la différence entre la fonction variée, et la fonction primitive.*

Coroll. 4. Si pour $x=\alpha$, l'expression $f(x+dx)-fx$ a une valeur k différente de zéro, la fonction fx cessera d'être continue pour $x=\alpha$; donc si le rapport

$$\frac{dy}{dx}=f'x=\frac{f(x+dx)-fx}{dx} \text{ est de la forme}$$

$$\frac{dy}{dx}=f'x=\frac{k}{dx}=\frac{k}{0}, \text{ la fonction } fx \text{ sera discontinue en}$$

$x=\alpha$.

Coroll. 5. La fonction φx, que nous désignerons dorénavant par $f'x$, peut être nulle, une quantité constante, une fonction continue de x, ou telle, qu'en y posant $x=\alpha$, on obtienne $\varphi(\alpha)=\frac{1}{0}$.

Le calcul différentiel a pour objet de former les rapports que nous avons désigné ci-dessus par

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_0 \text{ ou } \frac{dy}{dx} \text{ ou } f'x,$$

et d'en déduire la différentielle de la fonction désignée par les notations $dy,\ dfx,\ f'x\,dx.$

Ce calcul repose sur une règle unique, savoir :

RÈGLE FONDAMENTALE.

Pour trouver la dérivée d'une fonction

$$y=fx, \qquad \text{il faut}$$

1° *Changer* x *en* $x+dx$, *retrancher de la fonction variée* $f(x+dx)$ *la fonction primitive* fx, *et*

2° *Supprimer tous les termes du quotient qui ont* dx *pour facteur.*

Démonst. Car on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x+dx)-fx}{dx}=f'x+\xi x\cdot dx=f'x.$$

Coroll. 1. Comme on a $dfx=f'x\cdot dx$, il est clair que l'on pourra poser également $\xi x\cdot dx=d\psi x$, et l'on aura par conséquent $f'x+d\psi x=f'x.$

Coroll. 2. Comme on a

$$dy=f(x+dx)-fx=f'x\,dx+\xi x\,dx^2=f'x\,dx,$$

l'on voit que *la différentielle d'une fonction s'obtient en changeant*

x *en* x+dx, *en retranchant de la fonction variée, la fonction primitive, et, en supprimant dans le résultat les termes qui ont* dx^2 *pour facteur.*

Comme on peut poser $\xi x \cdot dx = d\psi x$, il est clair que l'on pourra écrire $(\xi x \cdot dx)dx = d(d\psi x) = d^2\psi x$;
on aura alors, par l'équation ci-dessus

$$f'x\,dx + \xi x \cdot dx^2 = f'x\,dx,$$

la suivante : $$df x + d^2\psi x = df x.$$

Coroll. 3. La différentielle d'une fonction s'obtient encore en multipliant sa dérivée par dx. Car on a :

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx,$$

$$dy = f'x \cdot dx \quad \text{ou} \quad df x = f'x \cdot dx.$$

Coroll. 4. De l'équation $dy = f(x+dx) - fx = df x$, on tire encore : $$f(x+dx) = fx + df x ;$$
c'est-à-dire, *la fonction variée est toujours égale à la fonction primitive, plus la différentielle de celle-ci.*

LEMME. n *étant un nombre entier et positif, je dis que l'on aura :*

$$(1+\frac{1}{n})^n > 2, \quad (1+\frac{1}{n})^n < 4.$$

Démonst. Soit $a > b$, on a :

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n < (n+1)a^n,$$

d'où : $$[a-(n+1)(a-b)]a^n < b^{n+1}. \qquad (1)$$

1° Soient $a = 1+\frac{1}{n}$, $b = 1+\frac{1}{n+1}$, la condition $a > b$ sera remplie, et l'équation (1) donnera :

$$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}. \qquad (2)$$

Pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ on trouve

$$2 < (\tfrac{3}{2})^2 < (\tfrac{4}{3})^3 < (\tfrac{5}{4})^4 \ldots < (1+\frac{1}{n})^n. \qquad (a)$$

2° Soient $a = \frac{1}{2m}$, $b = 1$, $n = m$, la condition $a > b$ sera remplie, et l'équation (1) donnera

$$\tfrac{1}{2}(1+\frac{1}{2m})^m < 1, \text{ ou } (1+\frac{1}{2m})^m < 2, \text{ ou } (1+\frac{1}{2m})^{2m} < 4. \qquad (3)$$

On a donc aussi, par (2), $$(1+\frac{1}{2m-1})^{2m-1} < 4. \qquad (4)$$

Les formules (3) et (4) donnent par conséquent

$$(1+\frac{1}{n})^n < 4. \qquad (b)$$

Coroll. Ces formules font voir que l'expression $(1+\frac{1}{n})^n$, toujours comprise entre 2 et 4, croît avec n, et doit approcher indéfiniment d'une constante qui répond à $n = \frac{1}{0}$

Nous désignerons par e cette constante, et nous trouverons plus tard qu'elle a pour valeur $e = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.} = 2{,}7182818\ldots$; c'est la base des logarithmes népériens. On peut donc poser $(1 + \frac{1}{n})^n = e + \frac{1}{n}\cdot P$.

3e Théorème.

En désignant par e *la base des logarithmes népériens ou la constante* $1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots = 2{,}7182818\ldots$,

je dis que l'on aura $1 + dy = e^{dy}$, $1 + \mu dy = (1 + dy)^{\mu}$,

μ étant un nombre quelconque fini.

Démonst. Soit $\frac{1}{n} = \Delta y$; on a, par le corollaire du lemme précédent :

$$(1 + \Delta y)^{\frac{1}{\Delta y}} = e + \Delta y \cdot P.$$

Mais quand $n = \frac{1}{0}$, on a $\frac{1}{n} = dy$, donc la formule précédente devient :

$$(1 + dy)^{\frac{1}{dy}} = e + dy \cdot P' = e;$$

donc $e^{dy} = 1 + dy$, donc $e^{dx} = 1 + dx$.

On a, en posant $dy = \mu dx$:

$e^{\mu dx} = 1 + \mu dx$; mais $e^{\mu dx} = (1 + dx)^{\mu}$, donc

$(1 + dx)^{\mu} = 1 + \mu dx$; donc $(1 + dy)^{\mu} = 1 + \mu dy$.

Coroll. Soit $\mu = b \log a$, $a = e^{\log a}$, on aura

$e^{b \log a \cdot dx} = 1 + b \log a \cdot dx$, ou $a^{bdx} = 1 + b \log a \cdot dx$;

pour $b = 1$, on a : $a^{dx} = 1 + \log a \cdot dx$.

4e Théorème.

Je dis que l'on a $\sin dx = dx$, $\cos dx = 1$, $\text{tg}\, dx = dx$, $\text{cotg}\, dx = \frac{1}{0}$,

$\text{séc}\, dx = 1$, $\text{cosé}\, dx = \frac{1}{0}$.

Démonst. Car on a :

$\sin dx = \sin 0 = 0 = dx$, $\quad \cos dx = \cos 0 = 1$,

$\text{tg}\, dx = \text{tg}\, 0 = 0 = dx$, $\quad \text{cotg}\, dx = \cot 0 = \frac{1}{0}$,

$\text{séc}\, dx = \text{séc}\, 0 = 1$, $\quad \text{cosé}\, dx = \text{cosé}\, 0 = \frac{1}{0}$.

5e Théor. y *désignant une quantité finie, je dis que l'on a :*

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}\, \sin y.$$

Démonst. On a par la form. du 3e théorème :

$$e^{ydx\sqrt{-1}} = 1 + \sqrt{-1} \cdot ydx = \varsigma[\cos\varphi + \sqrt{-1}\, \sin\varphi].$$

$$\varsigma = \sqrt{\{1 + y^2 dx^2\}} = 1, \quad \cos\varphi = 1, \quad \sin\varphi = ydx,$$

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{ydx}{1}; \text{ d'où } \varphi = ydx, \quad \frac{\varphi}{dx} = y.$$

Mais on a :

$$e^{y\sqrt{-1}} = (1+\sqrt{-1}\,ydx)^{\frac{1}{dx}} = \varsigma^{\frac{1}{dx}}[\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi]^{\frac{1}{dx}},$$

$$= \cos\frac{\varphi}{dx}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{dx},$$

$$= \cos y+\sqrt{-1}\sin y.$$

En changeant y en $-y$, on a :

$$e^{-y\sqrt{-1}} = \cos y-\sqrt{-1}\sin y.$$

Coroll. 1. De ces deux formules on déduit, par addition et soustraction

$$\sin y = \frac{e^{y\sqrt{-1}}-e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos y = \frac{e^{y\sqrt{-1}}+e^{-y\sqrt{-1}}}{2}.$$

Coroll. 2. On en tire encore par la division :

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{\cos y+\sqrt{-1}\sin y}{\cos y-\sqrt{-1}\sin y} = \frac{1+\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,y}{1-\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,y};$$

d'où, en prenant les logarithmes népériens :

$$y = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,y}{1-\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,y}.$$

Coroll. 3. On a :

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y), \text{ d'où :}$$

$$\log[e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)] = x+y\sqrt{-1}.$$

Soit $e^x = r$ et $a+b\sqrt{-1} = r(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$, on aura :

$$r = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}.$$

Cela posé, la formule ci-dessus donnera :

$$\log(a+b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2)+\sqrt{-1}\cdot\text{arc tg}\,\frac{b}{a}.$$

Nous avons divisé cet ouvrage en deux parties; la 1re se rapporte à la théorie, la 2de aux applications du calcul différentiel. Dans la Ire partie on s'occupe de la formation, de la transformation et de la comparaison des dérivées des diverses sortes de fonctions.

Rem. générale. Il est important de faire observer que la formule

du 2e Théor. renferme virtuellement tout le Calcul différentiel, et le Calcul intégral ; c'est, je crois, pour la première fois qu'on assigne à ces calculs une base unique, et qu'on s'est élevé à cette haute synthèse (*).

(*) La haute importance du 1er Théor. nous engage à le démontrer de nouveau, dans cette note, par des considérations géométriques.

Soit $y = fx$ l'aire d'une courbe $y' = \varphi x$, alors $f(x+\Delta x) - fx$, exprimera l'aire comprise entre les ordonnées extrêmes $\varphi(x+\Delta x)$, et φx. Soit $x < x_1 < x+\Delta x$, il existera une ordonnée φx_1 telle que le rectangle

$$\varphi x_1 \cdot \Delta x ;$$

Soit équivalent à l'aire $f(x+\Delta x) - fx$. Mais en prenant

$$0 < \alpha < 1, \quad \text{et} \quad x_1 = x + \alpha \Delta x,$$

la condition $x < x + \alpha \Delta x < x + \Delta x$ sera remplie, et l'on pourra poser

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - fx = \varphi(x + \alpha \Delta x) \cdot \Delta x ;$$

Donc, etc.

Ire PARTIE.

—

THÉORIE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Cette partie se compose de deux sections, dans la première on s'occupe des dérivées des fonctions explicites ou des formules, et dans la seconde des fonctions implicites ou des équations.

Ire SECTION.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS EXPLICITES.

Nous divisons cette Section en deux Chapitres, le 1er traite des dérivées des fonctions d'une seule variable, et le second des fonctions de plusieurs variables.

CHAPITRE Ier.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

A. *Dirivées et différentielles du 1er ordre.*

a) *Des fonctions d'une variable indépendante.*

§ 1.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS SIMPLES.

1er THÉORÈME. *Soit* $y = a + bfx$, a *et* b *étant constants, je dis que l'on aura :* $\frac{dy}{dx} = bf'x$, $dy = bf'x.dx$.

Démonst. On a par la règle fondamentale :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[a+bf(x+dx)]-[a+bfx]}{dx}.$$

$$= \frac{b[f(x+dx)-fx]}{dx},$$

$$= bf'x.$$

$$dy = bf'x \cdot dx.$$

Coroll. 1. Donc la dérivée d'une constante est nulle. Car soit $b=0$, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx} = 0$.

Coroll. 2. Quand $fx=x$, on a $a+bfx=a+bx$, donc la dérivée de $a+bx$ se réduit à la constante b ; car on a alors $f'x = \frac{dx}{dx} = 1$.

2^me^ Théor. *Soient* $y=fx$, μ *une quantité finie quelconque, je dis que l'on aura :* $\frac{dy^\mu}{dx} = \mu y^{\mu-1} \cdot \frac{dy}{dx}$, $dy^\mu = \mu y^{\mu-1} \cdot dy$.

Car on a (Notions prélim., 3^e^ théor.) :

$$\frac{dy^\mu}{dx} = \frac{(y+dy)^\mu - y^\mu}{dx},$$

$$= \frac{y^\mu[(1+\frac{dy}{y})^\mu - 1]}{dx}$$

$$= \frac{y^\mu[1+\mu\frac{dy}{y} - 1]}{dx},$$

$$= \mu y^{\mu-1}\frac{dy}{dx};$$

$$dy^\mu = \mu y^{\mu-1}\frac{dy}{dx} \cdot dx = \mu y^{\mu-1} dy.$$

Coroll. 1. Soit $fx=x$ on a $d \cdot x^\mu = \mu x^{\mu-1} dx$, $\frac{d.x^\mu}{dx} = \mu x^{\mu-1}$.

2. » $fx = a+bx$ » $d \cdot (a+bx)^\mu = \mu(a+bx)^{\mu-1} \cdot b dx$.

3. » $\mu = \frac{b}{a}$, on a :

$$d \cdot y^{\frac{b}{a}} = \frac{b}{a} y^{\frac{b-a}{a}} \cdot dy = \frac{bdy}{a\sqrt[a]{y^{a-b}}}.$$

Pour $b=1$ on a $d.y^{\frac{1}{a}}=\dfrac{dy}{a\sqrt[a]{y^{a-1}}}$. Pour $a=2$, on a :

$$d.\sqrt{y}=\frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

4. Soit $\mu=-a$, on a :

$d.y^{-a}=-a.y^{-a-1}.dy=-\dfrac{dy}{ay^{a+1}}$. Si $a=1$ on a :

$$d.\frac{1}{y}=-\frac{dy}{y^2}.$$

3^me^ Théor. *Soit* $y=e^{fx}$, e *étant la base des logarithmes népériens, je dis que l'on aura :*

$$\frac{dy}{dx}=e^{fx}.f'x, \quad dy=e^{fx}.f'x.dx.$$

Démonst. On a, par la règle fondamentale, et le 3^e^ théor. des notions préliminaires :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{f(x+dx)}-e^{fx}}{dx}=\frac{e^{fx+df x}-e^{fx}}{dx}=e^{fx}\left(\frac{e^{df x}-1}{dx}\right)=e^{fx}\frac{(1+df x-1)}{dx}$$

$$=e^{fx}\frac{df x}{dx}=e^{fx}f'x.$$

$$dy=e^{fx}f'x dx.$$

Coroll. 1. Soit $fx=x$, on a $y=e^x$, $\dfrac{dy}{dx}=e^x$, $dy=e^x dx$.

Soit $fx=-x$, on a $y=e^{-x}$, $\dfrac{dy}{dx}=-e^{-x}$, $dy=-e^{-x}dx$.

Coroll. 2. On a $a=e^{\log a}$, donc $y=a^{fx}=e^{\log a.fx}$; d'où :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(a^{fx})}{dx}=e^{\log a.fx}.\log a\, f'x=a^{fx}.\log a\, f'x.$$

Si $fx=x$, on a $\dfrac{d(a^x)}{dx}=a^x\log a$.

4^e^ Théor. *Soit* $y=\log(fx)$, e *étant la base, je dis que l'on a :*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'x}{fx}, \quad dy=\frac{f'x}{fx}.dx.$$

Démonst. De l'équation $y=\log(fx)$, on déduit

$$fx=e^y; \text{ donc } f'x=e^y.\frac{dy}{dx}=fx.\frac{dy}{dx};$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'x}{fx}, \quad dy = \frac{f'x}{fx}dx.$$

Coroll. 1. Si $fx = x$ on a $\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}$, $d\log x = \frac{dx}{x}$.

Coroll. 2. Si $y = x^x$, on fera $x = e^{\log x}$, donc $y = e^{x\log x}$, d'où

$$\frac{dy}{dx} = e^{x\log x}\frac{d(x\log x)}{dx} = x^x.\frac{d(x\log x)}{dx}.$$

Rem. Nous indiquerons les logarithmes dont la base est $e = (1+0)^{\frac{1}{0}}$, toujours par la notation log, ce sont les logarithmes népériens; les autres logarithmes, à base quelconque a, seront indiqués par Log.

Coroll. 3. Soit $y = \mathrm{Log}(fx)$, a étant la base, on aura :

$$y = \mathrm{Log}(fx) = \frac{1}{\log a}\cdot\log(fx); \text{ donc}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log a}\cdot\frac{f'x}{fx}, \quad dy = \frac{1}{\log a}\cdot\frac{f'xdx}{fx}.$$

5e Théor. *Soit* $y = \sin fx$, *je dis que l'on aura :*

$$\frac{dy}{dx} = f'x\cos fx, \quad dy = f'x\,dx\cos fx.$$

$$= f'x\sin(fx + \frac{\pi}{2}), \quad dy = f'xdx\sin(fx + \frac{\pi}{2}).$$

Démonst. On a, par la règle fondamentale, et le 4e théor. des notions préliminaires :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin[f(x+dx)] - \sin fx}{dx},$$

$$= \frac{\sin(fx + dfx) - \sin fx}{dx}$$

$$= \frac{\sin fx\cos dfx + \sin dfx\cos fx - \sin fx}{dx},$$

$$= \frac{\sin fx + dfx\cdot\cos fx - \sin fx}{dx},$$

$$= \frac{dfx}{dx}\cdot\cos fx = f'x\cos fx = f'x\sin(fx + \frac{\pi}{2}).$$

$$dy = f'xdx\cos fx = f'xdx\sin(fx + \frac{\pi}{2}).$$

Coroll. 1. Si $fx = ax$, on a :

$\frac{d\sin ax}{dx} = a dx \cos ax$; quand $a=1$ on a $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$,

$d\sin x = \cos x \cdot dx$.

Coroll. 2. Soit $y = \cos fx = \sin(\frac{\pi}{2} - fx)$; on aura :

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\frac{\pi}{2} - fx) \cdot \frac{d(\frac{\pi}{2} - fx)}{dx},$$

$$= -\frac{dfx}{dx} \sin fx = -f'x \sin fx.$$

Donc, si $fx = ax$, on a $\frac{d\cos ax}{dx} = -a dx \sin ax$; quand $a=1$, on a $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$, et $d\cos x = -\sin x dx$.

Mais comme on a $\cos(fx + \frac{\pi}{2}) = -\sin fx$, on aura aussi :

$$\frac{dy}{dx} = -f'x \sin fx = f'x \cdot \cos(fx + \frac{\pi}{2}).$$

6e Théor. *Soit* $y = \mathrm{tg}\, fx$, *on aura* :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'x}{\cos^2 fx}, \quad dy = \frac{f'x\, dx}{\cos^2 fx}.$$

Démonst. A cause de $\mathrm{tg}\, a - \mathrm{tg}\, b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{tg}(fx + dfx) - \mathrm{tg}\, fx}{dx} = \frac{\sin dfx}{\cos(fx + dfx)\cos fx} : dx,$$

$$= \frac{\frac{dfx}{dx}}{(\cos fx \cos dfx - \sin fx \sin dfx)\cos fx},$$

$$= \frac{f'x}{(\cos fx - dfx \cdot \sin fx)\cos fx},$$

$$= \frac{f'x}{\cos^2 fx}.$$

Coroll. 1. Si $fx = x$, on a $\frac{d\,\mathrm{tg}\, x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Coroll. 2. Soit $y = \cot fx = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - fx)$; on aura :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d\left(\frac{\pi}{2} - fx\right)}{dx}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - fx\right)} = \frac{-f'x}{\sin^2 fx}.$$

7° Théor. *Soit* $y = \text{séc}\, fx$, *je dis que l'on aura :*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'x \sin fx}{\cos^2 fx}, \quad dy = \frac{f'x\,dx \sin fx}{\cos^2 fx}$$

Démonst. On a :

$$y = \text{séc}\, fx = \frac{1}{\cos fx}, \text{ donc}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{1}{\cos f(x+dx)} - \frac{1}{\cos fx}\right] : dx,$$

$$= \left[\frac{1}{\cos(fx + df x)} - \frac{1}{\cos fx}\right] : dx,$$

$$= \frac{(\cos fx - \cos fx + df x \sin fx) : dx}{\cos^2 fx - df x \cdot \sin fx \cos fx},$$

$$= \frac{\dfrac{df x}{dx} \cdot \sin fx}{\cos^2 fx} = \frac{f'x \cdot \sin fx}{\cos^2 fx}.$$

Coroll. Soit $y = \text{cosséc}\, fx = \text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - fx\right)$, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d\left(\frac{\pi}{2} - fx\right)}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{2} - fx\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - fx\right)} = \frac{-f'x \cos fx}{\sin^2 fx}.$$

8° Théor. *Soit* $y = \arcsin fx$, *je dis que l'on aura :*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'x}{\sqrt{1-(fx)^2}}, \quad dy = \frac{f'x\,dx}{\sqrt{1-(fx)^2}}.$$

Démonst. De l'équation $y = \arcsin fx$, on tire :

$$fx = \sin y, \quad \sqrt{1-(fx)^2} = \cos y.$$

Donc $\dfrac{df x}{dx} = \dfrac{d \sin y}{dx}$ ou $f'x = \cos y \cdot \dfrac{dy}{dx}$; d'où l'on tire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'x}{\cos y} = \frac{f'x}{\sqrt{1-(fx)^2}}.$$

Coroll. 1. Soit $fx = ax$, on aura :

$$\frac{d \arcsin ax}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}.$$

Si l'on fait $a = 1$, il vient :

$$\frac{d \arcsin . x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ et } d(\arcsin . x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Coroll. 2. On a :

$$y = \arccos . fx = \frac{\pi}{2} - \arcsin . fx), \text{ donc}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f'x}{\sqrt{1-(fx)^2}} = \frac{d(\arccos . fx)}{dx}.$$

Si $fx = x$ on trouve $\frac{d(\arccos . x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$d(\arccos . x) = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9^e Théor. *Soit* $y = \text{arc tg} . fx$, *je dis que l'on aura :*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'x}{1+(fx)^2}, \quad dy = \frac{f'x\,dx}{1+(fx)^2}.$$

Démonst. De $y = \text{arc tg} . fx$ on tire $fx = \text{tg}\, y$, donc :

$$f'x = \frac{\frac{dy}{dx}}{\cos^2 y}, \text{ d'où :}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'x . \cos^2 y,$$

$$= f'x . \frac{1}{1+\text{tg}^2 y}.$$

$$= \frac{f'x}{1+(fx)^2}.$$

Coroll. 1. Soit $fx = x$ on aura $f'x = 1$; donc

$$\frac{d . \text{arc tg} . x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}; \quad d . \text{arc tg} . x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Coroll. 2. Comme on a :

$$y = \text{arc cot} . fx = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg} . fx, \text{ on trouve :}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f'x}{1+(fx)^2}.$$

10e Théor. *Soit* $y = \text{arc séc} \cdot fx$, *je dis que l'on aura*.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'x}{fx\sqrt{(fx)^2-1}}, \quad dy = \frac{f'x.dx}{fx\sqrt{(fx)^2-1}}.$$

Démonst. On a $fx = \text{séc}\, y = \frac{1}{\cos y}$, $\cos y = \frac{1}{fx}$, $\sin y = \frac{\sqrt{(fx)^2-1}}{fx}$.

Donc $$f'x = \frac{d\,\text{séc}\, y}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}\sin y}{\cos^2 y}$$; d'où l'on tire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'x \cdot \cos^2 y}{\sin y} = f'x \cdot \frac{1}{(fx)^2} : \frac{\sqrt{(fx)^2-1}}{fx} = \frac{f'x}{fx\sqrt{(fx)^2-1}}.$$

Coroll. 1. Soit $fx = x$, on aura $f'x = 1$, donc

$$\frac{d.\text{arc séc} \cdot x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Coroll. 2. On a :

$$y = \text{arc cosé} \cdot fx = \frac{\pi}{2} - \text{arc séc} \cdot fx, \text{ d'où :}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f'x}{fx\sqrt{(fx)^2-1}}.$$

11e Théor. *Soit* $y = \varphi x + \sqrt{-1} \cdot \psi x$, *on aura* :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi' x + \sqrt{-1}.\psi' x, \quad dy = (\varphi' x + \sqrt{-1}\,\psi' x)dx.$$

Démonst. On a, par la règle fondamentale :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left\{\varphi(x+dx) + \sqrt{-1}\,\psi(x+dx)\right\} - \left\{\varphi x + \sqrt{-1}\,\psi x\right\}}{dx},$$

$$= \frac{\varphi(x+dx) - \varphi x}{dx} + \sqrt{-1} \cdot \frac{\psi(x+dx) - \psi x}{dx},$$

$$= \varphi' x + \sqrt{-1}.\psi x.$$

$$dy = (\varphi' x + \sqrt{-1} \cdot \psi x)dx.$$

§ 2.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS COMPOSÉES.

12e Théor. *Soit* $y = \varphi x + fx$, *je dis que l'on aura* :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi' x + f'x, \quad dy = \varphi' x dx + f'x dx = d\varphi x + df x.$$

Démonst. On a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x+dx)+f(x+dx)-\varphi x-fx}{dx},$$

$$= \frac{\varphi(x+dx)-\varphi x}{dx} + \frac{f(x+dx)-fx}{dx},$$

$$= \frac{d\varphi x}{dx} + \frac{df x}{dx} = \varphi' x + f' x ;$$

$$dy = \frac{d\varphi x}{dx}\cdot dx + \frac{df x}{dx}\cdot dx = d\varphi x + df x = \varphi' x dx + f x dx.$$

Coroll. 1.. Si $y = a\varphi x + b f x$, on a :

$$\frac{dy}{dx} = a\varphi' x + b f' x.$$

Soit $b = -1$, $a = 1$, donc $y = \varphi x - fx$, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi' x - f' x.$$

Coroll. 2. Si $y = a fx + b f_1 x + c f_2 x +$ etc., on aura :

$$\frac{dy}{dx} = a f' x + b f'_1 x + c f'_2 x + \text{etc.}$$

13e Théor. *Soit* $y = \varphi x \cdot fx$, *je dis que l'on aura :*

$$\frac{dy}{dx} = \varphi' x \cdot fx + f' x \cdot \varphi x, \quad dy = fx \cdot d\varphi x + \varphi x \cdot df x.$$

Démonst. On a, par la règle fondamentale :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x+dx) f(x+dx) - \varphi x \cdot fx}{dx},$$

$$= \frac{(\varphi x + d\varphi x)(fx + df x) - \varphi x \cdot fx}{dx},$$

$$= \frac{\varphi x \cdot fx + \varphi x \cdot df x + fx \cdot d\varphi x + d\varphi x \cdot df x - \varphi x \cdot fx}{dx},$$

$$= \varphi x \cdot \frac{df x}{dx} + fx \cdot \frac{d\varphi x}{dx} + d\varphi x \cdot \frac{df x}{dx},$$

$$= \varphi x \cdot f' x + fx \cdot \varphi' x + f' x \cdot \varphi' x \cdot dx,$$

$$= \varphi x \cdot f' x + fx \cdot \varphi' x ;$$

$$dy = \varphi x \cdot f' x dx + fx \cdot \varphi' x dx = \varphi x \cdot df x + fx \cdot d\varphi x.$$

Coroll. Si $y = \varphi x \cdot fx \cdot \psi x$, on trouve :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi x \cdot \frac{d(fx.\psi x)}{dx} + fx \cdot \psi x \cdot \frac{d\varphi x}{dx},$$

$$= \varphi x.fx.\psi' x + \varphi x.\psi x.f'x + fx.\psi x.\varphi' x.$$

14e Théor. *Soit* $y = \frac{fx}{\varphi x}$, *je dis que l'on aura :*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi x \cdot f'x - fx.\varphi' x}{\overline{\varphi x^2}}, \quad dy = \frac{\varphi x \cdot dfx - fx \cdot d\varphi x}{\overline{\varphi x^2}}.$$

Démonst. De $y = \frac{fx}{\varphi x}$, on tire $fx = y \cdot \varphi x$;

donc $f'x = \frac{dy}{dx} \cdot \varphi x + \varphi' x.y$,

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \varphi x + \varphi' x \cdot \frac{fx}{\varphi x};$$

d'où : $$\frac{dy}{dx} = \frac{f'x - \varphi' x \frac{fx}{\varphi x}}{\varphi x} = \frac{\varphi x \cdot f'x - fx.\varphi' x}{\overline{\varphi x^2}};$$

$$dy = \frac{\varphi x.f'x dx - fx.\varphi' x dx}{\overline{\varphi x^2}} = \frac{\varphi x \cdot dfx - fx \cdot d\varphi x}{\overline{\varphi x^2}}.$$

Coroll. Soit $fx = a$, donc $y = \frac{a}{\varphi x}$, on aura $f'x = 0$, d'où :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a\varphi' x}{\overline{\varphi x^2}}.$$ Soit $a = 1$, $\varphi x = x$,

donc $y = \frac{1}{x}$, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{d(\frac{1}{x})}{dx} = -\frac{1}{x^2}$.

Rem. Soit $y = \varphi x \cdot \psi x$, donc $\log y = \log \varphi x + \log \psi x$, on aura

$$\frac{d \log y}{dx} = \frac{d \log \varphi x}{dx} + \frac{d \log \psi x}{dx},$$

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{d\varphi x}{\varphi x dx} + \frac{d\psi x}{\psi x \cdot dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left\{ \frac{\frac{d\varphi x}{dx} \cdot \psi x + \frac{d\psi x}{dx} \cdot \varphi x}{\varphi x \cdot \psi x} \right\},$$

$$= \varphi' x.\psi x + \psi' x.\varphi x.$$

§ 3.

(b). DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES D'UNE FONCTION A VARIABLE DÉPENDANTE.

15° THÉOR. *Soit* $z = fy$, $y = \varphi x$, x *étant la variable indépendante, je dis que l'on aura :*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df y}{dy} \cdot \frac{d\varphi x}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Démonst. Si y était variable indépendante, on aurait :

$dz = \frac{df}{dy} . dy$. Divisons par dx, il vient :

$\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Mais on a : $\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}$, donc

$\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$; donc

$dz = \frac{df}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx} . dx.$

Coroll. Soit $u = fz$, $z = \varphi y$, $y = \psi x$, on aura :

$$\frac{du}{dz} = \frac{df}{dz}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\psi}{dx};$$

donc en multipliant il vient :

$$\frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d\psi}{dx}, \text{ ou :}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d\psi}{dx}.$$

1^er^ *Exemple.* Chercher la dérivée de $z = (a + bx^m)^n$.

Je fais $z = y^n$, $y = a + bx^m$, j'aurai :

$$\frac{dz}{dy} = n y^{n-1}, \quad \frac{dy}{dx} = mbx^{m-1};$$

en multipliant ces deux équations j'en déduirai :

$$\frac{dz}{dx} = bmnx^{m-1} y^{n-1} = bmnx^{m-1} (a + bxm)^{n-1}.$$

2° *Exemple.* Chercher la dérivée de $z = x^x$. Je fais $y = x \log x$, d'où $z = e^y$. Ces équations me donnent :

$$\frac{dz}{dy} = e^y, \quad \frac{dy}{dx} = \log x + 1, \text{ donc :}$$

$$\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = e^y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1).$$

3e *Exemple.* Chercher la dérivée de $z = \log \frac{a+bx}{a-bx}$.

Je fais $y = \frac{a+bx}{a-bx}$, dont $z = \log y$; on aura :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2ab}{(a-bx)^2}; \text{ donc}$$

$$\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{2ab}{(a-bx)^2} = 2ab \cdot \frac{1}{a^2 - b^2x^2}.$$

§ 4.

TRANSFORMATION DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES IRRATIONNELLES EN EXPRESSIONS RATIONNELLES.

1er Problème. *Étant donnée une expression de la forme*

$$dy = f(\varphi x^{\frac{\alpha}{\beta}}, \varphi x^{\frac{\gamma}{\delta}}, \varphi x^{\frac{\varepsilon}{\eta}}, \ldots)\,dx, \quad \varphi x \textit{ étant rationnel},$$

on demande de rendre rationnelle cette expression.

Solut. On fera $\varphi x = z^{\beta\delta\eta\ldots}$, soit $x = \psi z$, on aura $\varphi x^{\frac{\alpha}{\beta}} = z^{\alpha\delta\eta\ldots}$,

$$\varphi x^{\frac{\gamma}{\delta}} = z^{\beta\gamma\eta\ldots}, \quad \varphi x^{\frac{\varepsilon}{\eta}} = z^{\beta\delta\varepsilon\ldots}, \quad dx = \psi' z \cdot dz, \text{ d'où}$$

$$dy = f(z^{\alpha\delta\eta\ldots}, z^{\beta\gamma\eta\ldots}, z^{\beta\delta\varepsilon\ldots})\psi' z dz.$$

1er *Exemple.* Rendra rationnelle l'expression

$$dy = \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[5]{x}}\,dx.$$

On fera $x = z^6$, $dx = 6z^5dz$, $\sqrt{x} = z^3$, $\sqrt[5]{x} = z^2$, donc

$$dy = 6\,\frac{z^3 + z^2}{z^3 - z^2} \cdot z^5 dz.$$

2e *Exemple.* $dy = \left\{\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} + \sqrt[5]{\frac{a+bx}{a-bx}}\right\}dx$, doit être

rendu rationnel ?

on pose $\frac{a+bx}{a-bx}=z^6$, $x=\frac{a}{b}\cdot\frac{z^6-1}{z^6+1}$, $dx=\frac{a}{b}\cdot\frac{12z^6dz}{(1+z^6)^2}$,

$\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}=z^3$, $\sqrt[3]{\frac{a+bx}{a-bx}}=z^2$, donc $dy=\frac{12a}{b}\frac{\{z^3+z^2\}z^6dz}{(1+z^6)^2}$.

2° Probl. *Rendre rationnelle la formule*

$$dy=f(x,\sqrt{a+bx\pm x^2})dx.$$

Solut. 1° Soit à rendre rationnelle l'expression

$$dy=f(x,\sqrt{a+bx+x^2})dx.$$

1re *Méth.* Posez $\sqrt{a+bx+x^2}=x+z$;

d'où : $a+bx=2zx+z^2$, $bdx=2zdx+2xdz+2zdz$,

$$x=\frac{z^2-a}{b-2z},\quad dx=-\frac{2(z^2-bz+a)}{(b-2z)^2},$$

$$\sqrt{a+bx+x^2}=\frac{z^2-bz+a}{2z-b};$$

donc $dy=f\left\{\frac{z^2-a}{b-2z},\frac{z^2-bz+a}{2z-b}\right\}\cdot\frac{-2(z^2-bz+a)}{(b-2z)^2}$.

2e *Méth.* Quand a est positif on peut poser aussi :

$$\sqrt{a+bx+x^2}=\sqrt{a}+xz.$$

Cela donne :

$$b+x=2z\sqrt{a}+xz^2,\quad dx=2dz\sqrt{a}+z^2dx+2xzdz,$$

$$x=\frac{2z\sqrt{a}-b}{1-z^2},\quad dx=\frac{2(z^2\sqrt{a}-bz+\sqrt{a})}{(1-z^2)^2}dz,$$

$$\sqrt{a+bx+x^2}=\frac{z^2\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}}{1-z^2};$$

donc :

$$dy=f\left(\frac{2z\sqrt{a}-b}{1-z^2},\frac{z^2\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}}{1-z^2}\right)\frac{2(z^2\sqrt{a}-bz+\sqrt{a})}{(1-z^2)^2}dz.$$

3e *Méth.* Quand les racines de l'équation

$$a+bx+x^2=(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

sont réelles, on peut poser

$$\sqrt{a+bx+x^2}=(x-\alpha)z;$$

on aura :

$$x-\beta=(x-\alpha)z^2,\quad dx=z^2dx+2(x-\alpha)zdz,$$

$$x = \frac{\beta - az^2}{1-z^2}, \quad dx = \frac{2z(\beta-\alpha)dz}{(1-z^2)^2},$$

$$\sqrt{a+bx+x^2} = \frac{(\beta-\alpha)z}{1-z^2}; \quad \text{donc :}$$

$$dy = f\left(\frac{\beta-az^2}{1-z^2}, \frac{(\beta-\alpha)z}{1-z^2}\right) \cdot \frac{2z(\beta-\alpha)dz}{(1-z^2)^2}.$$

2° Soit, en second lieu,

$$dy = f(x, \sqrt{a+bx-x^2})dx.$$

1^er^ *Cas*, $a > 0$.

1re *Méth.* Elle n'est plus applicable; car en élevant

$$\sqrt{a+bx-x^2} = x+z$$

au carré, le terme en x^2 ne s'en irait plus.

2e *Méth.* Comme $a > 0$, on pose :

$$\sqrt{a+bx-x^2} = \sqrt{a}+xz, \quad \text{d'où}$$

$$a+bx-x^2 = a+2\sqrt{a}\cdot xz+x^2z^2,$$

$$b-x = 2\sqrt{a}\cdot z+xz^2,$$

$$dx = -2\sqrt{a}\,dz - 2xzdz - z^2dx,$$

$$x = \frac{b-2\sqrt{a}\cdot z}{1+z^2}, \quad dx = -\frac{2(\sqrt{a}+bz-\sqrt{a}\cdot z^2)dz}{(1+z^2)^2},$$

$$\sqrt{a+bx-x^2} = \sqrt{a}+z\cdot\frac{b-2\sqrt{a}\cdot z}{1+z^2} = \frac{\sqrt{a}+bz-\sqrt{a}\cdot z^2}{1+z^2}.$$

Donc

$$dy = f\left\{\frac{b-2\sqrt{a}\cdot z}{1+z^2}, \frac{\sqrt{a}+bz-\sqrt{a}\cdot z^2}{1+z^2}\right\} \times \frac{-2(\sqrt{a}+bz-\sqrt{a}\cdot z^2)dz}{(1+z^2)^2}.$$

3e *Méth.* Si les racines de l'équation

$$x^2-bx-a = (x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

sont réelles, on posera :

$$\sqrt{a+bx-x^2} = (x-\alpha)z,$$

$$(x-\alpha)(\beta-x) = (x-\alpha)^2z^2,$$

$$\beta - x = (x-\alpha)z^2,$$

$$dx = -2zx\,dz + 2\alpha z\,dz - z^2dx,$$

$$x = \frac{\beta+\alpha z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2(\alpha-\beta)z\,dz}{(1+z^2)^2},$$

$$\sqrt{a+bx-x^2} = \frac{(\beta-\alpha)z}{1+z^2}; \text{ donc}$$

$$dy = f\left\{\frac{\beta+\alpha z^2}{1+z^2}, \frac{(\beta-\alpha)z}{1+z^2}\right\} \cdot \frac{2(\alpha-\beta)z\,dz}{(1+z^2)^2}.$$

2^me^ *Cas*, $a<0$.

La 1re *méthode* ne peut s'employer pour la raison indiquée ci-dessus ;

La 2e *méthode* ne peut pas s'employer non plus, à cause du terme $\sqrt{-a}$, qui serait imaginaire.

La 3e *méthode* est applicable, car si les racines de l'équation

$$-a+bx-x^2 = 0,$$

n'étaient pas réelles, le radical serait imaginaire quelque fut x; car on a :

$$-a+bx-x^2 = -[a-bx+x^2] = -[(x-\frac{b}{2})^2+(a-\tfrac{1}{4}b^2)].$$

Donc si $a>\frac{1}{4}b^2$, l'expression $-a+bx-x^2$ sera négative, quelque soit x. Donc pour que le radical soit réel, il faut que l'on ait $a<\frac{1}{4}b^2$, ou que les racines de l'équation

$$-a+bx-x^2 = x^2-bx+a = 0 \text{ soient réelles.}$$

Donc, quand a est négatif, ainsi que x^2, la 3e méthode est seule applicable.

1er *Exemple.* Rendre rationnelle l'expression

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}.$$

Par la 1re *méth.* On pose :

$$\sqrt{a+bx+x} = x-z, \quad \text{d'où :}$$

$$a+bx = -2xz+dz, \quad dx = \frac{2(z-x)dz}{b+2z};$$

donc
$$dy = \frac{2(z-x)dz}{(b+2z)(x-z)} = \frac{2\,dz}{b+2z}.$$

Par la 2e méth. a étant supposé positif, on pose :

$$\sqrt{a+bx+x^2} = \sqrt{a}+xz\,;\quad \text{d'où}$$

$$b+x = 2\sqrt{a}\cdot z + xz^2\,,$$

$$dx = 2\sqrt{a}\cdot dz + z^2dx + 2xz\,dz\,,$$

$$dx = \frac{2(\sqrt{a}+xz)dz}{1-z}\,;\quad \text{donc}$$

$$dy = \frac{2(\sqrt{a}+xz)\,dz}{(1-z^2)(\sqrt{a}+xz)} = \frac{2\,dz}{1-z^2}\,.$$

Par la 3e méth. Soient α, β, les racines réelles de l'équation

$$x^2+bx+a=0\,,$$

on posera :

$$\sqrt{a+bx+x^2} = (x-\alpha)z\,;\qquad \text{d'où :}$$

$$x-\beta = (x-\alpha)z^2\,,$$

$$dx = z^2dx + 2xzdz - 2\alpha z dz\,,$$

$$dx = \frac{2(x-\alpha)zdz}{1-z^2}\,;\quad \text{donc}$$

$$dy = \frac{2(x-\alpha)\,zdz}{(1-z^2)(x-\alpha)z} = \frac{2\,dz}{1-z^2}\,.$$

2e *Exemp.* Rendre rationnelle l'expression

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}\,.$$

La 1re méth. n'est pas applicable.

La 2e méth. exige que l'on ait $a>0$, cela étant, on fera :

$$\sqrt{a+bx-x^2} = \sqrt{a}+xz\,,\quad \text{d'où :}$$

$$a+bx-x^2 = a+2\sqrt{a}\cdot xz + x^2z^2\,,$$

$$b-x = 2\sqrt{a}\cdot z + xz^2\,,$$

$$dx = -2\sqrt{a}\cdot dz - z^2dx - 2z\,xdz\,,$$

$$dx = -\frac{2(\sqrt{a}+xz)dz}{1+z^2}\,;\quad \text{donc :}$$

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a}+xz} = \frac{-2dz}{1+z^2}\,.$$

3° *Méth.* α, β étant les racines réelles de l'équation

$$x^2 - bx - a = 0,$$

on posera : $\sqrt{a + bx - x^2} = (x - \alpha)z$, d'où :

$$\beta - x = (x - \alpha)z^2,$$

$$dx = \frac{2(x-\alpha)z\,dz}{1+z^2},$$

$$dy = \frac{dx}{(x-\alpha)z} = \frac{-2\,dz}{1+z^2}.$$

3° Probl. *Rendre rationnelle, quand cela est possible, la différentielle binôme*

$$dy = x^m(a + bx^n)^{\frac{\alpha}{\beta}}dx;$$

on suppose m *et* n *entiers et* $n > 0$.

Solut. 1^er^ *Cas.* Si $m+1 = nk$, k étant entier, on posera :

$$a + bx^n = u^\beta,$$ on trouvera

$$dy = \frac{\beta}{nb}u^{\alpha+\beta-1}\left(\frac{u^\beta - a}{b}\right)^{k-1}du.$$

2^e^ *Cas.* Si $\frac{m+1}{n} + \frac{\alpha}{\beta} = k$, k désignant un nombre entier, on posera : $a + bx^n = x^n u^\beta$, et l'on trouvera :

$$dy = -\frac{\beta}{n}a^k u^{\alpha+\beta-1}(u^\beta - b)^{-k-1}.$$

Ces deux cas sont les seuls dans lesquels le binome ci-dessus peut être rendu rationnel.

1^er^ *Exemp.* Rendre rationnel le binôme :

$$dy = \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = x^{-3}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot dx.$$

On a ici $\frac{m+1}{n} = \frac{-3+1}{2} = -1$; il faut donc poser, conformément à la règle du 1^er^ Cas,

$$1 - x^2 = u^2,$$

$$x = (1-u^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$x^{-2} = (1-u^2)^{-1},$$

$$x^{-3}dx = -(1-u^2)^{-2}u\,du;$$

donc $$dy = -\frac{du}{(1-u^2)^2}.$$

2° *Exemp.* Rendre rationnelle l'expression

$$dy = x^7 dx (1-x^3)^{-\frac{2}{5}} = \frac{x^7 dx}{\sqrt[5]{(1-x^3)^2}}.$$

On a ici $$\frac{m+1}{n} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{8}{5} - \frac{2}{5} = 2;$$

il faut donc poser, conformément à la règle du 2d cas,

$$1 - x^3 = x^3 u^3;$$

d'où $x = (1+u^3)^{-\frac{1}{3}}$, et $x^8 = (1+u^3)^{-\frac{8}{3}}$;

en différentiant cette équation, on trouve :

$$x^7 dx = -u^2 du (1+u^3)^{-\frac{11}{3}}.$$

Comme on a :

$$1 - x^3 = x^3 u^3 = (1+u^3)^{-1} \cdot u^3,$$

$$(1-x^3)^{-\frac{2}{3}} = (1+u^3)^{\frac{2}{3}} \cdot u^{-2}, \text{ il vient :}$$

$$dy = -du(1+u^3)^{-3} = \frac{-du}{(1+u^3)^3}.$$

B. *Dérivées et différentielles des ordres supérieurs.*

a) *Des fonctions d'une variable indépendante.*

§ 5.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES SUPÉRIEURES DES FONCTIONS SIMPLES.

Notations et définitions.

Soit $\frac{dy}{dx} = y_1$, on aura $\frac{dy_1}{dx} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$, et l'on écrit, pour abréger, $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''x$.

$\frac{d^2y}{dx^2}$ se nomme le coëfficient différentiel du 2d ordre, et $f''x$, la dérivée seconde de $y = fx$.

Soit encore $\frac{d^2y}{dx^2} = y_2$, on aura $\frac{dy_2}{dx} = \frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dx}$, et l'on écrira, pour abréger :

$$\frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''x.$$

$\frac{d^3y}{dx^3}$ se nomme le coëfficient différentiel du 3e ordre, et $f'''x$, la dérivée 3e de $y = fx$.

De même :

$$d^2y = d^2fx = f'x \cdot dx^2,\ d^3y = d^3fx = f'''x \cdot dx^3,$$

seront les différentielles du 2d et du 3e ordre de $y = fx$.

En général $\frac{d^ny}{dx^n}$, sera le coëfficient différentiel du n^e ordre,

$f^{(n)}x$ la dérivée n^e de $y = fx$, et $d^ny = d^nfx = f^{(n)}xdx$,

exprimera la différentielle du n^e ordre de la même fonction.

Ces notations font voir que, pour former les dérivées des ordres consécutifs, il faut :

1° *Différentier la dérivée du* 1er *ordre, et diviser par* dx; *le quotient sera la dérivée seconde;*

2° *Différentier la dérivée seconde, et diviser le résultat par* dx; *le quotient sera la dérivée* 3e; etc.

16e Théor. *Soit* $y = x^\mu$, μ *étant un nombre constant quelconque, je dis que l'on aura :*

$$\frac{d^n(x^\mu)}{dx^n} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

$$d^n(x^\mu) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n}dx^n.$$

Démonst. Car on a, par la règle ci-dessus :

$$\frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu-1},\ \frac{d^2(x^\mu)}{dx^2} = \mu(\mu-1)x^{\mu-2},\ \frac{d^3(x^\mu)}{dx^3} = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},$$

etc., donc

$$\frac{d^n(x^\mu)}{dx^n} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n}.$$

Coroll. 1. Si $\mu = n$, on a :

$$\frac{d^n(x^n)}{dx^n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

Si μ est entier et plus petit que n, on a :

$$\frac{d^n(x^\mu)}{dx^n} = 0.$$

Coroll. 2. Soit $\mu = -1$, on a :

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{x^{n+1}}.$$

Soit $\mu = -\frac{1}{2}$, on a :

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n x^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Coroll. 3. Soient $u = a + bx$, $du = bdx$; en posant $y = u^\mu$, on aura :

$$\frac{d^n u^\mu}{du^n} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)u^{\mu-n}\text{ ; donc}$$

$$\frac{d^n(a+bx)^\mu}{dx^n} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\cdot b^n(a+bx)^{\mu-n}.$$

Exemp. Chercher les valeurs des expressions :

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{x+y\sqrt{-1}}\right)}{dx^n}, \quad \frac{d^n\left(\frac{1}{x-y\sqrt{-1}}\right)}{dx^n}.$$

On a :

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{x+y\sqrt{-1}}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \ldots n}{(x+y\sqrt{-1})^n},$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{x-y\sqrt{-1}}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \ldots n}{(x-y\sqrt{-1})^{n+1}}.$$

Coroll. Mais on a :

$$\frac{1}{x+y\sqrt{-1}} = \frac{x}{x^2+y^2} - \sqrt{-1}\,\frac{y}{x^2+y^2}, \text{ donc}$$

Soit encore $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} = \ldots$ ou aussi $\frac{d_{n-1}}{dx} = \ldots$

pour abréger :

$$\frac{d\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}}{dx} = \frac{d_{n-1}}{dx} = \ldots$$

$\frac{d^3y}{dx^3}$ se nomme le coefficient différentiel ... ;

dérivée 3e de $y = fx$.

De même :

$$d^2y = d^2fx = f''x \cdot dx^2 \ldots$$

seront les différentielles du 2e ordre

En général $\frac{d^ny}{dx^n}$, sera le coefficient ...

$f^{(n)}x$ la dérivée n^e de $y = \ldots$

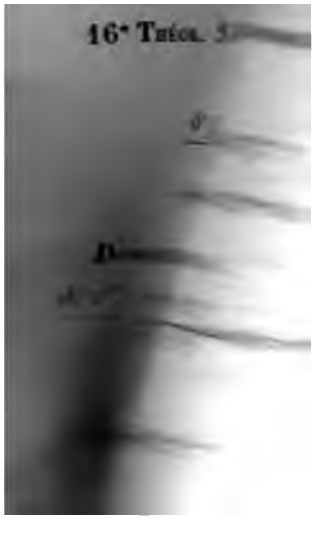
exprimera la différentielle ...

Ces notations font voir ...

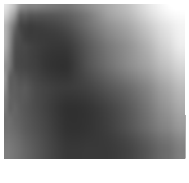
consécutifs, il faut :

1° *Différentier la dérivée ... tient sera le dividende ...*

2° *Différentier le ... le quotient sera le ...*



$a \log a)^x$,



Si $m=-1$, on a :

$$\frac{d^n(a^{-x})}{dx^n}=(-1)^n a^{-x}(\log a)^n.$$

Si $a=e$, on a $\log a=1$, donc

$$\frac{d^n(e^{mx})}{dx^n}=m^n e^x.$$ Soit $m=1$, on a :

$$\frac{d^n(e^x)}{dx^n}=e.$$ Soit $m=-1$, on a :

$$\frac{d^n(e^{-x})}{dx^n}=(-1)^n e^x.$$

18e Théor. *Soit* $y=\mathrm{Log}\,x$, *je dis que l'on aura :*

$$\frac{d^n \mathrm{Log}\,x}{dx^n}=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{(-1)^{n-1}1\cdot 2\ldots(n-1)}{x^n},$$

$$d^n \mathrm{Log}\,x=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{(-1)^{n-1}1.2\ldots(n-1)}{x^n}dx^n.$$

Démonst. On a, en effet :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{x};$$ donc :

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{d^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{n-1}}=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{(-1)^{n-1}1\cdot 2\ldots(n-1)}{x^n}.$$

Coroll. 1. Si $a=e$, donc $\log a=1$, on trouve :

$$\frac{d^n \log x}{dx^n}=\frac{(-1)^{n-1}1\cdot 2\ldots(n-1)}{x^n}.$$

Coroll. 2. Soit $u=a+bx$, $y=\log u$, on trouve :

$$\frac{d^n \log u}{du^n}=\frac{(-1)^{n-1}1.2\ldots(n-1)}{u^n};$$ donc :

$$\frac{d^n \log(a+bx)}{dx^n}=\frac{(-1)^{n-1}1.2\ldots(n-1)b^n}{(a+bx)^n}.$$

19e Théor. *Soit* $y=\sin x$, *je dis que*

$$\frac{d^n(\sin x)}{dx^n}=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right).$$

Démonst. Car on a successivement :

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x = \sin\left(\frac{4\pi}{2} + x\right),$$

etc., donc

$$\frac{d^n(\sin x)}{dx^n} = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right).$$

1. *Rem.* Soit $n = 4r, 4r+1, 4r+2, 4r+3,$ $r = 0, 1, 2,$ etc. } on aura évidemment :

$$\frac{d^{4r}\sin x}{dx^{4r}} = \sin x,$$

$$\frac{d^{4r+1}\sin x}{dx^{4r+1}} = \cos x,$$

$$\frac{d^{4r+2}\sin x}{dx^{4r+2}} = -\sin x,$$

$$\frac{d^{4r+3}\sin x}{dx^{4r+3}} = -\cos x.$$

2. *Rem.* On trouvera de même, en posant $y = \cos x$:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \cos x = \cos\left(\frac{4\pi}{2} + x\right),$$

etc., donc

$$\frac{d^n\cos x}{dx^n} = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right).$$

Si $n = 4r, 4r+1, 4r+2, 4r+3,$ $r = 0, 1, 2, \ldots$ } on aura en outre :

$$\frac{d^{4r}\cos x}{dx^{4r}} = \cos x\,,$$

$$\frac{d^{4r+1}\cos x}{dx^{4r+1}} = -\sin x\,,$$

$$\frac{d^{4r+2}\cos x}{dx^{4r+2}} = -\cos x\,,$$

$$\frac{d^{4r+3}\cos x}{dx^{4r+3}} = \sin x.$$

§ 6.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES SUPÉRIEURES DES FONCTIONS COMPOSÉES.

20e Théor. *Soit* $y = a\varphi x + b\psi x = a\varphi + b\psi$, *on aura :*

$$\frac{d^n(a\varphi + b\psi)}{dx^n} = a\frac{d^n\varphi}{dx^n} + b\frac{d^n\psi}{dx^n} = a\varphi^{(n)} + b\psi^{(n)}\,,$$

$$d^n(a\varphi + b\psi) = ad^n\varphi + bd^n\psi = a\varphi^{(n)}dx^n + b\psi^{(n)}dx^n.$$

Exemp. Soit $y = \dfrac{1}{a^2 - x^2} = \dfrac{\frac{1}{2a}}{a-x} + \dfrac{\frac{1}{2a}}{a+x}$, on aura :

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2-x^2}\right)}{dx^n} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{d^n\left(\frac{1}{a-x}\right)}{dx^n} + \frac{1}{2a}\cdot\frac{d^n\left(\frac{1}{a+x}\right)}{dx^n}$$

$$= \frac{1}{2a}\cdot 1\cdot 2\ldots n\left\{\frac{1}{(a-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(a+x)^{n+1}}\right\}.$$

21e Théor. *Soient* $y = \varphi x\cdot\psi x = \varphi\cdot\psi$,

$$\frac{d^m\varphi}{dx^m} = \varphi^{(m)}, \quad \frac{d^m\psi}{dx^m} = \psi^{(m)}\,,$$

je dis que l'on aura :

$$\frac{d^n(\varphi.\psi)}{dx^n} = \varphi\psi^{(n)} + n\varphi'\psi^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\varphi''\psi^{(n-2)} + \text{etc.} + \varphi^{(n)}.\psi.$$

$$d^n(\varphi.\psi) = \varphi d^n\psi + nd\varphi\cdot d^{n-1}\psi + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d^2\varphi\cdot d^{n-2}\psi + \text{etc.} + \psi\cdot d^n\varphi.$$

Démonst. On a, par des différentiations consécutives :

$$\frac{d(\varphi.\psi)}{dx} = \varphi\frac{d\psi}{dx} + \psi\frac{d\varphi}{dx} = \varphi\cdot\psi' + \psi\varphi'\,,$$

$$\frac{d^2(\varphi.\psi)}{dx^2} = \varphi\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dx} + \psi\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi\psi'' + 2\varphi'\psi' + \psi\varphi'',$$

$$\frac{d^3(\varphi\cdot\psi)}{dx^3} = \varphi\frac{d^3\psi}{dx^3} + 3\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2} + 3\frac{d^2\varphi}{dx^2}\cdot\frac{d\psi}{dx} + \psi\frac{d^3\varphi}{dx^3}$$
$$= \varphi\psi''' + 3\varphi'\psi'' + 3\varphi''\psi' + \psi\varphi'''.$$

Donc, en généralisant, on a les formules du théorème.

22e Théor. *Soit* $y = \varphi x$, *je dis que l'on aura :*

$$d^n\varphi x = \varphi(x+ndx) - \frac{n}{1}\varphi(x+\overline{n-1}\,dx) + \frac{n(n-1)}{1.2}\varphi(x+\overline{n-2}\,dx) - \text{etc.}$$
$$+(-1)^{n-1}.n\varphi(x+dx) + (-1)^n\varphi x.$$

Démonst. En effet, si l'on change, dans cette expression, x en $x+dx$, et que l'on retranche du résultat la fonction primitive, la formule précédente subsistera pour le $n+1$e ordre, puisque l'on trouve :

$$d^{n+1}\varphi x = \varphi(x+\overline{n+1}\,dx) - \varphi(x+ndx)$$
$$-\frac{n}{1}\varphi(x+ndx) + \frac{n}{1}\varphi(x+\overline{n-1}\,dx)$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\varphi(x+\overline{n-1}\,dx) - \frac{n(n-1)}{1.2}\varphi(x+\overline{n-2}\,dx)$$
$$\text{etc.,}$$
$$+(-1)^{n-1}\cdot\frac{n}{1}\varphi(x+2dx) - (-1)^{n-1}\frac{n}{1}\varphi(x+dx)$$
$$+(-1)^n\varphi(x+dx) - (-1)^n\varphi x$$
$$= \varphi(x+\overline{n+1}\,dx) - \frac{n+1}{1}\varphi(x+ndx)$$
$$+\frac{(n+1)n}{1.2}\varphi(x+\overline{n-1}\,dx) - \text{etc.}$$
$$+(-1)^n\frac{n+1}{1}\varphi(x+dx) + (-1)^{n+1}\varphi x.$$

Or, la formule est vraie pour $n=1$, car on a $d\varphi x = \varphi(x+dx) - \varphi x$, donc elle est vraie pour $n=2, 3$, etc.

1er *Exemp.* Soit $y = \text{séc}\,x$, d'où $y\cos x = 1$, on aura : $\frac{d^n(y\cos x)}{dx^n} = 0$, donc en fesant $\varphi = y$, $\psi = \cos x$, on aura par le 21e théorème :

$$\cos x\,\frac{d^n y}{dx^n} - n\sin x\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\cos x$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\sin x + \text{etc.} = 0.$$

D'où l'on tire :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n \sec x}{dx^n} = \operatorname{tg} x\left\{n\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{dy^{n-3}}{dx^{n-3}} + \text{etc.}\right\}$$
$$+\frac{n(n-1}{1.2}\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\,\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} + \text{etc.}$$

Pour $n = 2, 3$, etc. $\dfrac{d\sec}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, on a :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 \sec x}{dx^2} = 2\operatorname{tg} x\cdot\frac{dy}{dx} + y = 2\operatorname{tg} x\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 \sec x}{dx^3} = \operatorname{tg} x\left\{3\frac{d^2 y}{dx^2} - y\right\} + 3\frac{dy}{dx}, \text{ etc.}$$

2e *Exemp.* Soit $y = \operatorname{tg} x$, donc $y\cos x = \sin x$, on trouve, en opérant comme ci-dessus :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)}{\cos x} + \operatorname{tg} x\left[n\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \text{etc.}\right]$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\,\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} + \text{etc.}$$

3e *Exemp.* Soit $y = \text{arc sin}\cdot x$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$,

On aura : $\dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \dfrac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)}{dx^n}$.

Donc, en fesant $\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, $\psi = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, et en ayant égard à la formule

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)}{du^n} = \frac{(1-)^n 1.3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot u^{n+\frac{1}{2}}},$$

on trouve :

$$\frac{d^{n+1}\arcsin\cdot x}{dx^{n+1}}=\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2^n(1-x^2)^n\sqrt{1-x^2}}\left\{(1+x)^n-n\frac{(1+x)^{n-1}(1-x)}{2n-1}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{1\cdot3(1+x)^{n-2}(1-x)^2}{(2n-1)(2n-3)}-\text{etc.}\right\}$$

4° *Exemp.* Soient $y=\arctg\cdot x$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$, on aura :

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\frac{d^n\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{dx^n}.$$

Or, si dans le corollaire de l'exemple du théor. 16°, on fait $y=1$, on trouve finalement :

$$\frac{d^{n+1}\arctg\cdot x}{dx^{n+1}}=\frac{(-1)^n1\cdot2\ldots n}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\arctg\cdot\frac{1}{x}\right].$$

b.) Différentielles et dérivées supérieures des fonctions d'une seule variable dépendante.

§ 7.

23° Théor. *Soient* $y=fx$, $x=\varphi v$, v *étant la variable indépendante, et par conséquent* x *une variable dépendante, dont* y *est fonction, je dis que l'on aura :*

$$(a)\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2y}{dv^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dv^2},\\ \frac{d^3y}{dv^3}=\frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dx}{dv}\right)^3+3\frac{dx}{dv}\frac{d^2x}{dv^2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dv^3},\\ \frac{d^4y}{dv^4}=\frac{d^4y}{dx^4}\left(\frac{dx}{dv}\right)^4+6\frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dx}{dv}\right)^2\left(\frac{d^2x}{dv^2}\right)+\\ \qquad\frac{d^2y}{dx^2}\left[4\frac{dx}{dv}\frac{d^3x}{dv^3}+3\left(\frac{d^2x}{dv^2}\right)^2\right]+\frac{dy}{dx}\frac{d^4x}{dv^4},\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

Démonst. Comme on a, par le théor. 15° :

$$\frac{dy}{dv}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dv},$$

1° on aura, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à v :

$$\frac{d\frac{dy}{dv}}{dv} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dv}\cdot\frac{dx}{dv} + \frac{d\frac{dx}{dv}}{dv}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Mais on a, conformément aux notations abrégées des dérivées et des différentielles supérieures :

$$\frac{d\frac{dy}{dv}}{dv} = \frac{d^2y}{dv^2},\quad d\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}dx;\ \text{donc}\ \frac{d\frac{dy}{dx}}{dv} = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dv},$$

$$\frac{d\frac{dx}{dv}}{dv} = \frac{d^2x}{dv^2};\ \text{donc l'égalité ci-dessus devient :}$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \frac{d^2x}{dv^2}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

2° En prenant les dérivées par rapport à v, dans les deux membres de cette dernière équation, on aura la suivante :

$$\frac{d\frac{d^2y}{dv^2}}{dv} = \frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dv}\cdot\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d\left(\frac{dx}{dv}\right)^2}{dv} + \frac{d\frac{d^2x}{dv^2}}{dv}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d^2x}{dv^2}\cdot\frac{d\frac{dy}{dx}}{dv}.$$

Mais on a :

$$d\frac{d^2y}{dv^2} = \frac{d^3y}{dv^3},\quad d\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3}dx;\ \text{donc}\ \frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dv} = \frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx}{dv},$$

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dv}\right)^2}{dv} = \frac{2\left(\frac{dx}{dv}\right)d\left(\frac{dx}{dv}\right)}{dv} = 2\frac{dx}{dv}\frac{d^2x}{dv^2},\quad \frac{d\frac{dy}{dx}}{dv} = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dv}.$$

Donc, en substituant, et en réduisant, on trouvera :

$$\frac{d^3y}{dv^3} = \frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dx}{dv}\right)^3 + 3\frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3x}{dv^3}. \qquad (\alpha)$$

3° Comme on a :

$$\frac{d\frac{d^3y}{dv^3}}{dv} = \frac{d^4y}{dv^4},$$

$$\frac{d\left(\frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dx}{dv}\right)^3\right)}{dv} = \frac{d\frac{d^3y}{dx^3}}{dv}\cdot\left(\frac{dx}{dv}\right)^3 + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{d\left(\frac{dx}{dv}\right)^3}{dv},$$

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dv}=\frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}\cdot\frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d\frac{d^2x}{dv^2}}{dv}+\frac{d^2x}{dv^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d\frac{dx}{dv}}{dx},$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3x}{dv^3}\right)}{dv}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{dv}\cdot\frac{d^3x}{d^3v}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\frac{d^3x}{dv^3}}{dv},$$

on trouvera aisément la 3e des équations (a), en prenant les dérivées de tous les termes de l'équation (α).

Exemp. On demande $\frac{d^2y}{dv^2}$, $\frac{d^3y}{dv^3}$, quand on donne $y=x^\mu$, $x=a+bv^n$.

On a :

$$\frac{dy}{dx}=\mu x^{\mu-1},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\mu(\mu-1)x^{\mu-2},\ \frac{d^3y}{dx^3}=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},$$

$$\frac{dx}{dv}=nbv^{n-1},\ \frac{dv^2}{dv^2}=n(n-1)bv^{n-2},\ \frac{d^3x}{dv^3}=n(n-1)(n-2)bv^{n-3}.$$

On a donc, par la 1re des formules (a) :

$$\frac{d^2y}{dv^2}=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}\cdot n^2b^2v^{2n-2}+\mu x^{\mu-1}\cdot n(n-1)bv^{n-2}$$

$$=\mu(\mu-1)n^2b^2(a+bv^n)^{\mu-2}v^{2n-2}+\mu n(n-1)b(a+bv^n)^{\mu-1}v^{n-2}.$$

La 2de des formules (a) donnera ensuite :

$$\frac{d^3y}{dv^3}=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}\cdot n^3b^3v^{3n-3}+3nbv^{n-1}\cdot n(n-1)bv^{n-2}\cdot\mu(\mu-1)x^{\mu-2}+\mu x^{\mu-1}\cdot n(n-1)(n-2)bv^{n-3},$$

$$=\mu(\mu-1)(\mu-2)n^3b^3(a+bv^n)^{\mu-3}v^{3n-3}+3\mu(\mu-1)n(n-1)b^2v^{2n-3}(a+bv^n)^{\mu-2}+\mu n(n-1)(n-2)bv^{n-3}(a+bv^n)^\mu.$$

24° Théor. *Soit* $y = f(x)$, $x = \varphi v$, v *étant la variable indépendante je dis que l'on aura :*

$$(b)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dv}}{\dfrac{dx}{dv}}, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d^2y}{dv^2}\cdot\dfrac{dx}{dv} - \dfrac{dy}{dv}\cdot\dfrac{d^2x}{dv^2}}{(\dfrac{dx}{dv})^3}, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{\dfrac{d^3y}{dv^3}(\dfrac{dx}{dv})^2 - 3\dfrac{d^2y}{dv^2}\dfrac{dx}{dv}\dfrac{d^2x}{dv^2} + 3\dfrac{dy}{dv}(\dfrac{d^2x}{dv^2})^2 - \dfrac{dy}{dv}\dfrac{dx}{dv}\dfrac{d^3x}{dv^3}}{(\dfrac{dx}{dv})^5}, \end{cases}$$

etc.

Démonst. Pour démontrer ces formules il suffirait de résoudre les équations (*a*) par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc.; mais on peut y parvenir directement, de cette manière :

on a : 1° $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{\dfrac{dx}{dv}\cdot dv} = \dfrac{\dfrac{dy}{dv}}{\dfrac{dx}{dv}}$.

2° Prenons les dérivées des deux membres de cette équation par rapport à x, on aura successivement :

$$\frac{d\dfrac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d\left\{\dfrac{\dfrac{dy}{dv}}{\dfrac{dx}{dv}}\right\}}{\dfrac{dx}{dv}\,dv} = \frac{\dfrac{dx}{dv}\cdot\dfrac{d\dfrac{dy}{dv}}{dv} - \dfrac{dy}{dv}\cdot\dfrac{d\dfrac{dx}{dv}}{dv}}{(\dfrac{dx}{dv})^3}, \quad \text{ou}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{dx}{dv}\cdot\dfrac{d^2y}{dv^2} - \dfrac{dy}{dv}\cdot\dfrac{d^2x}{dv^2}}{(\dfrac{dx}{dv})^3}.$$

3° En prenant la dérivée, par rapport à x, dans les deux membres de cette nouvelle équation, nous aurons :

$$\frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dx} = \frac{d\left\{\frac{\frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2y}{dv^2}-\frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}}{(\frac{dx}{dv})^3}\right\}}{\frac{dx}{dv}\cdot dv} = \frac{d\left\{\frac{\frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2y}{dv^2}-\frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}}{(\frac{dx}{dv})^3}\right\}:dv}{\frac{dx}{dv}}.$$

En effectuant les dérivations, par les formules relatives aux dérivées des produits, des quotients, et des puissances, on trouve successivement :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d\left\{\frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2y}{dv^2}-\frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}\right\}}{dv}\cdot(\frac{dx}{dv})^3 - \frac{d(\frac{dx}{dv})^3}{dv}\cdot\left\{\frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2y}{dv^2}-\frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}\right\}}{(\frac{dx}{dv})^7}$$

$$= \frac{(\frac{d^2y}{dv^2}\frac{d^2x}{dv^2}+\frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^3y}{dv^3}-\frac{d^2y}{dv^2}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}-\frac{dy}{dv}\frac{d^3x}{dv^3})\frac{dx}{dv} - 3(\frac{d^2x}{dv^2})\left\{\frac{dx}{dv}\frac{d^2y}{d^2v}-\frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}\right\}}{(\frac{dx}{dv})^5}$$

$$= \frac{\frac{d^3y}{dv^3}(\frac{dx}{dv})^2 - 3\frac{d^2y}{dv^2}\frac{dx}{dv}\frac{d^2x}{dv^2}+3\frac{dy}{dv}(\frac{d^2x}{dv^2})^2-\frac{dy}{dv}\frac{dx}{dv}\frac{d^3x}{dv^3}}{(\frac{dx}{dv})^5}.$$

1re *Rem.* Si l'équation $x = \varphi v$ n'était pas donnée, et que l'on sut seulement que x est dépendant dans l'équation primitive $y = fx$, alors en supprimant le dénominateur dv dans les formules (b), on obtiendrait :

$$(c)\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3} = \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dx^2}, \\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y\,dx^2 - 3d^2y\,dx\,d^2x + 3dy(d^2x)^2 - dy\,dx\,d^3x}{dx^5} \\ \qquad = \frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3x}{dx^3}+3\left[\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{d^2x}-\frac{d^2y}{dx^2}\right]\frac{d^2x}{d^2x}. \end{cases}$$

Les 2^{ds} membres de ces formules sont alors ce que deviennent les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., lorsque x cesse d'être indépendant. On obtiendrait les formules (*c*) directement, en différentiant l'équation $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}$ plusieurs fois de suite, et en considérant tous les termes des seconds membres consécutifs comme variables.

2^{me} *Rem.* Si l'on avait deux équations telles que $y=\psi(v)$, $x=\varphi(v)$, l'élimination de v conduirait à une relation de la forme $y=f(x)$. Or l'on voit, qu'au moyen des équations (*b*), on pourra obtenir les dérivées 1re, 2^{e}, 3^{e}, etc., de la fonction $f(x)$, sans connaître cette fonction, ce qui arriverait, par exemple, si l'élimination de v n'était pas praticable.

Exemple. Soient $y=v-r\sin\frac{v}{r}$, $x=r-r\cos\frac{v}{r}$, en éliminant v on aurait une relation $y=fx$, entre x et y, on demande les dérivées 1re et 2^{e} de la fonction inconnue fx. On a ici :

$$\frac{dy}{dv}=1-\cos\frac{v}{r},\quad \frac{d^2y}{dv^2}=\frac{1}{r}\sin\frac{v}{r},\quad \frac{dx}{dv}=\sin\frac{v}{r},$$
$$\frac{d^2x}{dv^2}=\frac{1}{r}\cos\frac{v}{r};$$

on a donc, par les deux premières des formules (*b*) :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=f'x=\frac{1-\cos\frac{v}{r}}{\sin\frac{v}{r}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2f}{dx_i^2}=f''x=\frac{1-\cos\frac{v}{r}}{r\sin^3\frac{v}{r}}.$$

25^{e} Théor. *Soit* $y=fx$, y *étant la variable indépendante, je dis que l'on aura :*

$$(d)\begin{cases}\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}},\\[2ex] \dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{-\frac{d^2y}{dx^2}}{(\frac{dy}{dx})^3},\\[2ex] \dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(\frac{d^2y}{dx^2})^2-(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}}{(\frac{dy}{dx})^5},\ \text{etc.}\end{cases}$$

Démonst. Car de l'équation $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$, on déduit :

1° $\quad\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

2° En prenant les dérivées par rapport à y, cette équation nous donnera :

$$\frac{d\frac{dx}{dy}}{dy}=\frac{d\left\{\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right\}}{\frac{dy}{dx}dx}=\frac{d\left\{\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right\}:dx}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{d\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{(\frac{dy}{dx})^3}}=\frac{-\frac{d^2y}{dx^2}}{(\frac{dy}{dx})^3}.$$

3° Prenons de nouveau la dérivée par rapport à y de cette dernière équation, il viendra :

$$\frac{d\frac{d^2x}{dy^2}}{dy}=-\frac{d\left\{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(\frac{dy}{dx})^3}\right\}}{\frac{dy}{dx}dx}=-\frac{d\left\{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(\frac{dy}{dx})^3}\right\}:dx}{\frac{dx}{dx}}$$

$$=-\frac{(\frac{dy}{dx})^3\cdot\frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dx}-\frac{d(\frac{dy}{dx})^3}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}}{(\frac{dy}{dx})^7};$$

ou $\quad\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3(\frac{d^2y}{dx^2})^2-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dy}{dx}}{(\frac{dy}{dx})^3}$, etc.

Exemple. Soient $y=v-r\sin\frac{v}{r}$, $x=r-r\cos\frac{v}{r}$, on demande les valeurs des coëfficients différentiels $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, $\frac{d^3x}{dy^3}$, en regardant y comme la variable indépendante. En éliminant v entre les proposées, on aurait une relation telle que $y=f(x)$, d'où l'on

déduirait $x = \varphi(y)$, équation qui, si elle était connue, nous donnerait immédiatement les dérivées cherchées. Il faut donc faire, comme l'on voit, le calcul de ces dérivées sans connaître les équations $y = fx$, $x = \varphi(y)$.

A cet effet, on trouve d'abord :

$$\frac{dy}{dv} = 1 - \cos\frac{v}{r}, \quad \frac{d^2y}{dv^2} = \frac{1}{r}\sin\frac{v}{r}, \quad \frac{d^3y}{dv^3} = \frac{1}{r^2}\cos\frac{v}{r}, \text{ etc.}$$

$$\frac{dx}{dv} = \sin\frac{v}{r}, \quad \frac{d^2x}{dv^2} = \frac{1}{v}\cos\frac{v}{r}, \quad \frac{d^3x}{dv^3} = -\frac{v\sin\frac{v}{r} + r\cos\frac{v}{r}}{rv^3}, \text{ etc.}$$

Par les formules (*b*) on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dv}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{1-\cos\frac{v}{r}}{\sin\frac{v}{r}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1-\cos\frac{v}{r}}{r\sin^3\frac{v}{r}},$$

$$\frac{dy^3}{d^3x} = \frac{(1-2\cos\frac{v}{r})(1-\cos\frac{v}{r})}{r^2\sin^3\frac{v}{r}}.$$

Les formules (*d*) donnent ensuite :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\sin\frac{v}{r}}{1-\cos\frac{v}{r}},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{1}{r(1-\cos\frac{v}{r})^2},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3-r(1-2\cos\frac{v}{r})}{r\sin\frac{v}{r}(1-\cos\frac{v}{r})^3}.$$

26° Théor. *Soit* $x = \varphi(y)$, x *étant la variable indépendante, je dis que l'on aura :*

$$(e)\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{3\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \dfrac{d^3x}{dy^3}\cdot\dfrac{dx}{dy}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^5}, \text{ etc.} \end{cases}$$

Démonst. Il suffira de changer dans les formules (d), y en x, et x en y; les formules (e) ne diffèrent pas, quant au fond, des formules (d).

Exemp. On donne l'équation $x = \text{arc sin } y$, on demande les dérivées $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, sans résoudre la proposée par rapport à y.

De l'équation donnée on déduit :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{y}{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{2y^2+1}{(1-y^2)^2\sqrt{1-y^2}};$$

les formules (e) nous donnent maintenant :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{y^2-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Ces résultats se vérifient aisément, car la proposée donne

$$y = \sin x;$$

donc $$\frac{dy}{dx} = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x = -y,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x = -\frac{\cos^2 x}{\cos x} = \frac{-(1-\sin^2 x)}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{y^2-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

L'usage le plus fréquent des formules de ce §, se rapporte au changement de la variable indépendante dans les formules différentielles qui ne sont relatives qu'à des fonctions d'une seule variable indépendante.

§ 8.

CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE DANS LES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES PROVENANT D'UNE FONCTION PRIMITIVE D'UNE SEULE VARIABLE INDÉPENDANTE.

La relation entre la nouvelle et l'ancienne variable indépendante peut être donnée sous forme finie, ou par une équation différentielle, elle peut être simplement sous-entendue; de là plusieurs cas, que nous traiterons en autant de problèmes séparés.

1^er^ Problème. *Étant donnée une expression*

$$F = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \text{etc.}),$$

dans laquelle x *est la variable indépendante, on demande l'expression transformée* F_1, *dans laquelle* v *serait la variable indépendante; la relation entre* x *et* v *est donnée sous forme finie, ou simplement sous-entendue.*

Solut. 1° Si la relation entre x et v est donnée sous la forme $x = \varphi v$, on formera les dérivées $\frac{dx}{dv}$, $\frac{d^2x}{dv^2}$, $\frac{d^3y}{d^3v}$, etc., qu'on introduira dans les équations (b), puis on remplacera dans F, les coëfficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. par leurs valeurs que donnent les équations (b); on aura ainsi :

$$F_1 = F_1\left(x, y, \frac{\frac{dy}{dv}}{\frac{dx}{dv}}, \frac{\frac{d^2y}{dv^2}\cdot\frac{dx}{dv} - \frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}}{\left(\frac{dx}{dv}\right)^3}, \text{ etc.}\right)$$

2° Si la relation entre x et v n'est pas donnée, et que l'on sache seulement que x doit être changé en une variable dépendante, il faudrait remplacer dans l'expression F, les coëfficients différentiels par leurs valeurs, que donnent les formules (c).

1^er^ *Exemp.* D'une équation primitive $y = fx$, non donnée, on a déduit l'expression

$$F = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

x étant indépendant, on demande ce que devient F quand v devient la variable indépendante, v étant lié à x par une équation donnée $x = \varphi v$.

On trouve :

$$F_1 = y + \frac{\varphi' v\left\{(\varphi' v)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2\right\}}{\frac{d^2y}{dv^2}\varphi' v - \frac{dy}{dv}\cdot\varphi'' v}.$$

Si la relation $x = \varphi v$ n'était pas donnée, on aurait :

$$F_1 = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dx^2}}.$$

2° *Exemp. Dans l'équation*

$$F = \frac{d^2y}{dx^2} + 2y\,\frac{dy}{dx} + \text{séc}^2 x = 0,$$

x *est la variable indépendante; que devient* F, *quand* $v = \text{tg}\,x$ *devient la variable indépendante ?*

On a $v = \text{tg}\,x$, $1 + v^2 = \text{séc}\,x$.

$$x = \text{arc tg}\,v, \quad \frac{dx}{dv} = \frac{1}{1+v^2}, \quad \frac{d^2x}{dv^2} = -\frac{2v}{(1+v^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dv}}{\frac{dx}{dv}} = (1+v^2)\,\frac{dy}{dv},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}}{(\frac{dx}{dv})^3} = \frac{d^2y}{dv^2}(1+v^2)^2 + 2v(1+v^2)\,\frac{dy}{dv};$$

donc

$$F_1 = \frac{d^2y}{dv^2}(1+v^2)^2 + 2v(1+v^2)\,\frac{dy}{dx} + 2y(1+v^2)\,\frac{dy}{dv} + 1 + v^2 = 0$$

$$= \frac{d^2y}{dv^2}(1+v^2) + 2(v+y)\,\frac{dy}{dv} + 1 = 0.$$

2° Probl. *L'expression*

$$F = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots),$$

provient d'une équation primitive $y = fx$, *non donnée,* x *étant la variable indépendante, transformer* F *en une expression propre à l'hypothèse où, dans l'équation* $y = fx$, y *serait la variable indépendante.*

Solut. Il faudra remplacer les coëfficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. par leurs valeurs en fonction de $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, etc., que fournissent les équations (*e*), ce qui donnera :

$$F_1 = F\left\{x, y, \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \frac{-\frac{d^2x}{dy^2}}{(\frac{dx}{dy})^3}, \ldots\right\}$$

Réciproquement, si d'une équation primitive $y = fx$, y étant la variable indépendante, on a déduit l'expression

$$F = F\left\{x, y, \frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2}, \ldots\right\},$$

on aurait l'expression F_1 correspondante à l'hypothèse, où x serait la variable indépendante, en remplaçant les dérivées $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, etc. par leurs valeurs que donnent les formules (*d*).

1er *Exemp.* L'expression $F = \dfrac{1+(\frac{dx}{dy})^2}{\frac{d^2x}{dy^2}}$, y étant indépendant, devient $F_1 = -\dfrac{\frac{dy}{dx}\left\{1+(\frac{dy}{dx})^2\right\}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, quand x est indépendant.

2e *Exemp.* Dans l'expression

$F = x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (\dfrac{dy}{dx})^3 - \dfrac{dy}{dx} = 0$, x est la variable indépendante, chercher ce que devient F quand y devient la variable indépendante.

On a :

$$F_1 = -x\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{(\frac{dx}{dy})^3} + \frac{1}{(\frac{dx}{dy})^3} - \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = 0; \qquad \text{donc}$$

$$F_1 = x\frac{d^2x}{dy^2} + (\frac{dx}{dy})^2 - 1 = 0.$$

3e Probl. *L'expression*

$$F = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots)$$

a été obtenue en supposant x *variable indépendante, transformer cette expression en une autre* F, *qui conviendrait à l'hypothèse, où* v *serait la nouvelle variable indépendante,* v *étant lié à* x, *par une équation différentielle donnée, de la forme*

$$dv = \varphi \cdot dx,$$

φ *étant une fonction de* x *et de* y.

Solut. On remplacera les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. par leurs valeurs (*c*), puis on déduira de l'équation $dv = \varphi \cdot dx$, par des différentiations consécutives, les valeurs des rapports $\frac{d^2x}{dx^2}$, $\frac{d^3x}{dx^3}$, etc., qu'on substituera dans l'expression proposée.

1^er *Exemp.* On donne

$$F=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$ x étant la variable indépendante, que devient F, quand v, donné par

(1) $dv=dx\cdot\sqrt{1+p^2}$, $p=\frac{dy}{dx}$, devient la variable indépendante.

Comme v est la variable indépendante, on a $\frac{dv}{dv}=1$, donc

$$\frac{d\frac{dv}{dv}}{dv}=0, \quad \text{donc} \quad \frac{d\,dv}{dv}=0.$$

Par conséquent, si nous différentions l'équation (1), en regardant dx comme variable, et dv comme constant, nous aurons :

$$0=d^2x\sqrt{1+p^2}+dx\cdot\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}};$$ d'où :

$$\frac{d^2x}{dx^2}=-\frac{p\frac{dp}{dx}}{1+p^2}.$$ Soit $\frac{dp}{dx}=q=\frac{d^2y}{dx^2}$, on aura

$$\frac{d^2x}{dx^2}=-\frac{pq}{1+p^2}.$$ Donc, à cause des formules (c) :

$$F_1=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dx^2}}$$

$$=\frac{\left\{1+p^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{q+p\cdot\frac{pq}{1+p^2}}=\frac{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}{q(1+2p^2)}.$$

2^e *Exemp.* On donne $F=a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$, x étant la variable indépendante, trouver ce que devient F, quand v devient la variable indépendante, on a l'équation

$$dv=ydx.$$

De cette équation on déduit :

$$0 = y d^2x + dx\,dy\,; \quad \text{d'où}$$

$$\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{y}, \text{ en posant } p = \frac{dy}{dx}.$$

On aura, par conséquent :

$$F_1 = a\left[\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dx^2}\right] + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

$$= a\left[\frac{d^2y}{dx^2} + p\cdot\frac{p}{y}\right] + bp + cy = 0\,;$$

Soit $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q$, donc

$$F_1 = a\left[q + \frac{p^2}{y}\right] bp + cy = 0.$$

§ 9.

Théorèmes de Taylor et de Maclaurin pour les fonctions d'une seule variable.

THÉORÈME DE TAYLOR.

Soit x *une variable quelconque réelle ou imaginaire,* h *un accroissement quelconque, réel ou imaginaire, si aucune des fonctions* fx, $f'x$, $f''x$, ... $f^{(n)}x$, *ne devient* $\frac{1}{0}$, *pendant que* x *parcourt, d'une manière continue, l'intervalle depuis* $x = x$, *jusqu'à* $x = x + h$, *je dis que l'on aura, pour cet intervalle :*

$$f(x+h) = fx + f'x\cdot h + f''x\cdot\frac{h^2}{1\cdot2} + f'''x\cdot\frac{h^3}{1\cdot2\cdot3} + \text{etc.}$$

$$+ f^{(n-1)}x\cdot\frac{h^{n-1}}{1\cdot2\ldots n-1} + f^n(x+\alpha h)\frac{h^n}{1\cdot2\ldots n};\ 0<\alpha<1.$$

Démonst. On a identiquement, et par le 1er Théor. des notions préliminaires :

$$f(x+h) = fx + h\left\{\frac{f(x+h) - fx}{h}\right\}$$

$$= fx + h f_1(x+\theta h),\quad 0<\theta<1.$$

$$f_1(x+\theta h) = f_1x + h\left\{\frac{f_1(x+\theta h) - f_1x}{h}\right\}$$
$$= f_1x + hf_2(x+\theta_1 h)\ ,\quad 0<\theta_1<1.$$
$$f_2(x+\theta_1 h) = f_2x + h\left\{\frac{f_2(x+\theta_1 h) - f_2x}{h}\right\}$$
$$= f_2x + hf_3(x+\theta_2 h)\ ,\quad 0<\theta_2<1.$$

etc. etc.

$$f_{n-1}(x+\theta_{n-2}h) = f_{n-1}x + hf_n(x+\theta_{n-1}h),\ 0<\theta_{n-1}<1.$$

En substituant la 2^de^ de ces équations dans la 1^re^, la 3^e^ dans le résultat de cette substitution, et ainsi consécutivement, on aura les valeurs successives :

$$f(x+h) = fx + hf_1(x+\theta h)$$
$$= fx + hf_1x + h^2f_2(x+\theta_1 h)$$
$$= fx + hf_1x + h^2f_2x + h^3f_3(x+\theta_2 h.$$

etc.

$$= fx + hf_1x + h^2f_2x + h^3f_3x + \ldots$$
$$+ h^{n-1}f_{n-1}x + h^n f_n(x+\theta_{n-1}h). \quad (I)$$

Pour déterminer les fonctions inconnues f_1x, f_2x, etc., prenons les dérivées consécutives par rapport à h de l'équation

$f(x+h) = fx + hf_1x + h^2f_2x + h^3f_3x + h^{n-1}f_{n-1}x + h^nf_nx +$ etc.,

nous aurons successivement :

$$f'(x+h) = f_1x + 2hf_2x + 3h^2f_3x + \text{etc.}$$
$$+ (n-1)h^{n-2}f_{n-1}x + nh^{n-1}f_nx + \text{etc.}$$
$$f''(x+h) = 1\cdot 2f_2x + 2\cdot 3hf_3x + \text{etc.}$$
$$+ (n-1)(n-2)h^{n-3}f_{n-1}x + n(n-1)h^{n-2}f_nx + \text{etc.}$$
$$f'''(x+h) = 1\cdot 2\cdot 3f_3x + \text{etc.}$$
$$+ (n-1)(n-2)(n-3)h^{n-4}f_{n-1}x + n(n-1)(n-2)h^{n-3}f_nx + \text{etc.}$$

etc.

$$f^{(n-1)}(x+h) = 1\cdot 2\ldots(n-1)f_{n-1}x + 2\cdot 3\ldots nhf_nx + \text{etc.}$$
$$f^{(n)}(x+h) = 1\cdot 2\cdot 3\ldots nf_nx + \text{etc.}$$

Fesons dans ces équations $h=0$, alors, si aucune des quantités

$$f_1x,\ f_2x,\ \ldots\ f_nx,$$

ne devient $\frac{\epsilon}{0}$ pour aucune valeur de x, comprise entre x et $x+h$, on aura :

$$f'x = f_1x,$$
$$f''x = 1.2\,f_2x,$$
$$f'''x = 1.2.3\,f_3x,$$
$$\text{etc.}$$
$$f^{(n-1)}x = 1.2\ldots(n-1)\,f^{n-1}x,$$
$$f_nx = 1.2\ldots n\,f_nx;$$

d'où l'on tire :

$$f_1x = f'x = \frac{dfx}{dx},$$
$$f_2x = \frac{f''x}{1.2} = \frac{1}{1.2}\frac{d^2fx}{dx^2},$$
$$f_3x = \frac{f'''x}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3fx}{dx^3},$$
$$\text{etc.}$$
$$f_{n-1}x = \frac{f^{(n-1)}x}{1.2\ldots(n-1)} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}fx}{dx^{n-1}},$$
$$f_nx = \frac{f^{(n)}x}{1.2\ldots n} = \frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^nfx}{dx^n}.$$

Donc

$$f_n(x+\theta_{n-1}h) = \frac{f^{(n)}(x+\theta_{n-1}h)}{1.2\ldots n} = \frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{d^nf(x+\theta_{n-1}h)}{dx^n}.$$

Remplaçons θ_{n-1} par α, et substituons les valeurs des fonctions f_1x, f_2x, etc., dans l'équation (I), on aura la formule cherchée, savoir :

$$f(x+h) = fx + f'x\,h + f''x\frac{h^2}{1.2} + f'''x\cdot\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$+ f^{(n-1)}x\cdot\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\alpha h).$$

Le terme $\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\alpha h) = R_n$, se nomme le terme complémentaire, ou le reste de la formule de Taylor. Si, en faisant $n=\infty$, la fonction fx, est telle que $R_\infty = 0$, et si de plus, aucune des dérivées $f'x$, $f''x$, etc., $f^{(\infty)}x$, ne devient $\frac{1}{0}$ pour l'intervalle de x à $x+h$, que parcourt x, alors on aura dans l'étendue de cet intervalle :

$$f(x+h) = fx + f'x.h + f''x\cdot\frac{h^2}{1.2} + f'''x\cdot\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc., à l'infini.}$$

Le second membre est alors la valeur du premier membre, mise sous la forme d'une série infinie.

THÉORÈME GÉNÉRAL DE MACLAURIN.

x *désignant une variable quelconque, réelle ou imaginaire, et* a *une valeur particulière de* x, *si aucune des fonctions* fx, f'x, f''x, ... f^nx, *ne devient* $\frac{1}{0}$, *pendant que* x *parcourt, d'une manière continue, l'intervalle depuis* x=a, *jusqu'à* x=x, *je dis que l'on aura, pour cet intervalle :*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'a + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''a + \text{etc.}$$

$$+ \frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2..n-1} fa^{(n-1)} + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2..n} f^{(n)}[a+\alpha(x-a)]\,;\, 0<\alpha<1.$$

Démonst. Si, dans la formule de Taylor

$$f(z+h) = fz + hf'z + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''z + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''z + \ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} f^{(n-1)}z + \frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n} f^{(n)}(z+\alpha h),$$

on fait $z=a$, $h=x-z$, on a la formule ci-dessus. La formule de Taylor exige que les dérivées $f'z$, $f''z$, ... $f^{(n)}z$ ne deviennent pas $\frac{1}{0}$ entre z et $z+h$; donc dans la formule de Maclaurin les dérivées $f'x$, $f''x$, etc. $f^{(n)}x$ ne doivent pas se réduire à $\frac{1}{0}$, entre a et x.

$$\text{Le terme } \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\ldots n} \cdot f^{(n)}[a+\alpha(x-a)] = R_n,$$

se nomme le terme complémentaire, ou le reste de la formule générale de Maclaurin.

Quand la fonction fx est d'une nature telle que l'on a $R_\infty = 0$, et que les fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc., jusqu'à l'infini, ne se réduisent pas à $\frac{1}{0}$, dans l'intervalle de a à x des variations de x, on aura le développement suivant :

$$fx = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \text{etc. à l'infini ; le second}$$

membre est alors, sous la forme d'une série infinie, la valeur du premier membre.

THÉORÈME PARTICULIER DE MACLAURIN.

Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si l'on fait, dans la formule de ce théorème, $a=0$, on aura la formule particulière de Maclaurin, savoir :

$$fx = f(0) + f'(0).x + f''(0).\frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$+ f^{(n-1)}(0).\frac{x^{n-1}}{1.2...n-1} + \frac{x^n}{1.2..n} f^{(n)}(\alpha x).$$

Les coëfficients

$$f(0), f'(0), f''(0), \ldots$$

expriment ce que deviennent les fonctions $fx, f'x, f''x$, etc., lors qu'on y pose $x=0$.

$$\text{Le terme } \frac{x^n}{1.2...n} f^{(n)}(\alpha x) = R_n,$$

est le terme complémentaire, ou le reste de la formule particulière de Maclaurin.

Si l'on a $R_n=0$, pour $n=\infty$, ou $R_\infty=0$, on a l'équivalence

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0).\frac{x^2}{1.2} + \text{etc. à l'infini.}$$

Le second membre est alors la valeur du premier membre, présentée sous la forme d'une série infinie.

La formule particulière de Maclaurin exige que les fonctions $f'x$, $f''x$, etc., $f^{(n)}x$, ne se réduisent pas à $\frac{1}{0}$ dans l'intervalle de 0 à x.

1re *Rem.* La formule de Taylor, qui renferme celles de Maclaurin comme cas particuliers, subsiste, quelque soient x et h, réels ou imaginaires, attendu qu'elle a été déduite d'une série d'identités. L'on voit donc, que les trois formules conviennent à toutes les hypothèses de x et de h.

2. *Rem.* Nous pouvons donner au reste R_n, des trois formules, une autre forme, plus convenable dans certaines recherches.

A cet effet, soit

$$\varphi a = \frac{(x-a)^n}{1.2...n} f^{(n)}[a + \alpha(x-a)].$$

En différentiant, par rapport à a, la formule

$$(1)\qquad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'a + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''a + \text{etc.} + \frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} f^{(n-1)}(a) + \varphi a,$$

on aura : $$0 = \frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} f^{(n)}(a) + \varphi' a;$$

d'où $$\varphi' a = -\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} f^{(n)} a;$$ on a donc aussi :

$$(2)\quad \varphi'[a+\alpha(x-a)] = -\frac{(1-\alpha)^{n-1}(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} f^{(n)}[a+\alpha(x-a)].$$

Mais on a, par le 1^er^ théor. des notions préliminaires,

$$\varphi x = \varphi a + (x-a)\varphi'[a+\alpha(x-a)], \qquad \text{d'où}$$
$$\varphi a = \varphi x - (x-a)\varphi'[a+\alpha(x-a)].$$

Si dans (1), on fait $a = x$, on a $\varphi x = 0$, donc

$$\varphi a = -(x-a)\varphi'[a+\alpha(x-a)]; \quad \text{donc, à cause de (2) :}$$
$$\varphi a = \frac{(1-\alpha)^{n-1}(x-a)^n}{1\cdot 2\ldots n-1} \cdot f^{(n)}[a+\alpha(x-a)].$$

On a donc, pour le reste de la formule générale de Maclaurin, les deux expressions :

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\ldots n} \cdot f^{(n)}[a+\alpha(x-a)], \quad 0<\alpha<1,$$
$$R_n = \frac{(1-\alpha)^{n-1}(x-a)^n}{1\cdot 2\ldots (n-1)} f^{(n)}[a+\alpha(x-a)], \quad 0<\alpha<1.$$

Si $a = 0$, on a la formule particulière de Maclaurin, son reste a par conséquent les formes :

$$\left.\begin{aligned} R_n &= \frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n} \cdot f^{(n)}(\alpha x), \\ R_n &= \frac{(1-\alpha)^{n-1}x^n}{1\cdot 2\ldots n-1} f^{(n)}(\alpha x). \end{aligned}\right\} 0<\alpha<1.$$

Si l'on change, dans la formule générale de Maclaurin, x en $a+h$, a en x, on reproduit la formule de Taylor, par conséquent le reste de cette formule peut se mettre indifféremment sous l'une ou l'autre de ces deux formes :

$$\left.\begin{aligned} R_n &= \frac{h^n}{1.2\ldots n}\cdot f^{(n)}(x+\alpha h), \\ R_n &= \frac{h^n(1-\alpha)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+\alpha h). \end{aligned}\right\} 0<\alpha<1.$$

3° *Rem.* La fonction $f(x)$ peut être telle que, pour une valeur particulière $x=a$, le développement de $f(a+h)$, renferme des termes irrationnels par rapport à h, ou des termes dans lesquels l'exposant de h est négatif; alors la formule de Taylor ne subsiste plus, et il faut recourir aux développements algébriques.

Exemp. $fx=\sqrt{x}+\sqrt[3]{(x-a)^4}$, donne :

$$f(a+h)=h^{\frac{4}{3}}+(a+h)^{\frac{1}{2}}=h^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{1}{2}}\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{h}{a}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{h^2}{a^2}+\text{etc.}\right)$$

$$fx=\frac{1}{(x-a)^2}+\sqrt{x}, \quad \text{donne}$$

$$f(a+h)=h^{-2}+(a+h)^{\frac{1}{2}}=h^{-2}+a^{\frac{1}{2}}\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{h}{a}+\frac{1.3}{2.4}\frac{h^2}{a^2}+\text{etc.}\right)$$

Ces cas exceptionnels ne peuvent jamais arriver si aucune des fonctions $fx, f'x, f''x$, etc.,

ne se réduit à $\frac{1}{0}$, pour $x=a$.

De plus, si l'une de ces fonctions devient $\frac{1}{0}$, pour $x=a$, toutes les suivantes se réduiront également à $\frac{1}{0}$.

Car soit $l<n<l+1$, l étant entier, on aura :

$$f(a+h)=fa+f'a.h+\text{etc.}$$
$$f^{(l)}a\cdot\frac{h^l}{1.2\ldots l}+f^{(n)}a\cdot\frac{h^n}{1.2\ldots n}+f^{(l+1)}a\cdot\frac{h^{l+1}}{1.2\ldots(l+1)};$$

d'où :

$$f^{(l+1)}(a+h)=\frac{n(n-1)\ldots(n-l)}{1.2\ldots n}f^{(n)}a\,h^{n-l-1}+\text{etc.}$$

Mais $n-l-1<0$, donc $h=0$, donne $f^{(l+1)}a=\frac{1}{0}$.

Exemp. $fx=c+x+(x-b)(x-a)^{\frac{5}{2}}$; donc

$$f'x=1+(x-a)^{\frac{5}{2}}+\tfrac{5}{2}(x-b)\sqrt{x-a},$$

$$f''x=3\sqrt{x-a}+\frac{3(x-b)}{4\sqrt{x-a}},$$

pour $x = a$, on trouve :

$$fa = c + a,$$
$$f'a = 1,$$
$$fa'' = \tfrac{1}{0};$$

donc $f'''a = \tfrac{1}{0}$, $f^{(IV)}a = \tfrac{1}{0}$, etc.,

et l'on aura : $f(a+h) = c + a + h + (a-b)h^{\frac{5}{2}} + h^{\frac{5}{3}}$.

Soit encore $fx = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - ax}}$, on a $f(a) = \tfrac{1}{0}$, donc $f'a = \tfrac{1}{0}$, etc.

$$f(a+h) = a^{-\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}(1 + \frac{h}{a})^{-\frac{1}{2}},$$

$$= a^{-\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}(1 - \tfrac{1}{2}\frac{h}{a} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{h^2}{a^2} - \text{etc.})$$

$$= \frac{1}{a}(\frac{h}{a})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2a}(\frac{h}{a})^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8a}(\frac{h}{a})^{\frac{5}{2}} + \text{etc.}$$

CHAPITRE II.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

A. *Dérivées et différentielles du 1er ordre.*

a). *Des fonctions de plusieurs variables indépendantes.*

§ 10.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS.

Si dans la fonction $u = f(x, y)$, on fait varier x et y, c'est-à-dire toutes les variables, alors

$$du = f(x + dx, y + dy) - f(x, y),$$

se nomme la différentielle totale de la fonction proposée; il en sera de même, si la fonction u est composée d'un nombre quelconque de variables; pourvu qu'on les fasse varier toutes, du exprimera toujours la *différentielle totale.*

Si dans la fonction $u = f(x, y)$, on ne fait varier que l'une des deux variables, alors les dérivées

$$\frac{du}{ax} = \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{f(x, y+dy) - f(x.y)}{dy},$$

se nomment les *dérivées partielles* de u, prises respectivement par rapport à x et à y. Il en sera de même pour les fonctions de plus de deux variables; pourvu que l'on ne laisse pas varier toutes les variables.

Nous désignerons avec Euler les dérivées partielles par des parenthèses, et nous écrirons :

$$(\frac{du}{dx}) = \frac{f(x+dx,y)-f(x,y)}{dx},\ (\frac{du}{dy}) = \frac{f(x,y+dy)-f(x,y)}{dy}.$$

Exemp. Soit $u = ax^2y^3 + b^2xy$, on aura les dérivées partielles $(\frac{du}{dx}) = 2axy^3 + b^2y$, $(\frac{du}{dy}) = 2ax^2y + b^2x$.

En multipliant les dérivées partielles par les différentielles de leurs variables, on obtient les *différentielles partielles*. Donc, si la fonction est $u = f(x,y)$, ses différentielles partielles seront respectivement :

$$(\frac{du}{dx})dx,\ (\frac{du}{dy})dy,$$

que l'on désigne aussi par d_xu, d_yu.

Rem. Si x doit varier seul, alors y est constant, donc $\frac{dy}{dx} = 0$.

Si y doit varier seul, alors x est constant, et par conséquent $\frac{dx}{dy} = 0$.

26e Théor. *La différentielle totale d'une fonction* $u = f(x,y,z...)$, *à plusieurs variables indépendantes, est égale à la somme de toutes ses différentielles partielles, prises par rapport à chacune de ses variables, savoir :*

$$du = d_xu + d_yu + d_zu + \ldots$$
$$= (\frac{du}{dx})dx + (\frac{du}{dy})dy + (\frac{du}{dz})dz + \ldots$$

Démonst. Soit $u = f(x,y,z)$, on aura :

$$du = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z),$$

Soient maintenant :

$$u_1 = f(x+dx, y, z),$$
$$u_2 = f(x+dx, y+dy, z),$$
$$u_3 = f(x+dx, y+dy, z+dz);$$

donc $du = u_3 - u$.

Mais on a (par le coroll. 2 de la règle fondamentale des no préliminaires) :

$$u_1 = u + d_x u,$$
$$u_2 = u_1 + d_y u_1,$$
$$u_3 = u_2 + d_z u_2.$$

D'un autre côté, on a par la règle fondamentale, et en diff tiant les équations précédentes :

$$d_y u_1 = d_y u + d_y d_x u = d_y u, \quad \text{donc} \quad d_z u_1 = d_z u;$$
$$d_z u_2 = d_z u_1 + d_z d_y u_1 = d_z u_1 = d_z u.$$

Donc, les équations ci-dessus deviennent :

$$u_1 = u + d_x u,$$
$$u_2 = u_1 + d_y u,$$
$$u_3 = u_2 + d_z u.$$

En les ajoutant et réduisant, on trouve :

$$u_3 = u + d_x u + d_y u + d_z u.$$

Donc
$$u_3 - u = du = d_x u + d_y u + d_z u,$$
$$= \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz.$$

Coroll. L'équation

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz$$

donne les trois dérivées totales :

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right) \frac{dy}{dz} + \left(\frac{du}{dz}\right) \frac{dz}{ux},$$
$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{du}{dx}\right) \frac{dx}{dy} + \left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right) \frac{dz}{dy},$$
$$\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dx}\right) \frac{dx}{dz} + \left(\frac{du}{dy}\right) \frac{dy}{dz} + \left(\frac{du}{dz}\right).$$

Si x doit seul varier, alors $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dx} = 0$, et la équations donnera

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right),$$

ou la dérivée partielle par rapport à x.

Si y doit varier seul, alors on a $\frac{dx}{dy} = 0$, $\frac{dz}{dy} =$

des équations ci-dessus se réduit à

$$\frac{du}{dy}=\left(\frac{du}{dy}\right),$$

ou à la dérivation partielle par rapport à y.

Enfin si z est seul variable, on a

$$\frac{dx}{dz}=0,\quad \frac{dy}{dz}=0,$$

et la 3^{me} des équations ci-dessus deviendra

$$\frac{du}{dz}=\left(\frac{du}{dz}\right),$$

ce qui est la dérivée partielle de u par rapport à z.

Exemp. Soit $u=axz^2+byx^2+czy^2$, on aura :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=az^2+2byx,\ \left(\frac{du}{dy}\right)=bx^2+2czy,\ \left(\frac{du}{dz}\right)=2axz+cy^2;$$

donc

$$du=(az^2+2byx)dx+(bx^2+2czy)dy+(2axz+cy^2)dx.$$

THÉORÈME D'EULER SUR LES FONCTIONS HOMOGÈNES.

27^e Théor. *Soit* $u=f(x,y,z,\ldots)$ *une fonction homogène de* a *dimensions, je dis que l'on aura :*

$$\left(\frac{du}{dx}\right)x+\left(\frac{du}{dy}\right)y+\left(\frac{du}{dz}\right)z+\ldots=au.$$

Démonst. Posons $x=x't$, $y=y't$, $z=z't$, etc., ..., on aura :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)=x',\ \left(\frac{dy}{dt}\right)=y',\ \left(\frac{dz}{dt}\right)=z',\ \ldots$$

et $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$, ... pour $t=1$.

On a ensuite $u=t^af(x',y',z',\ldots)$.

Différentions cette équation, en regardant $x,y,z,\ldots$ comme des fonctions de t, on aura :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)=at^{a-1}f(x',y',z')$$

ou $\left(\frac{du}{dx}\right)x'+\left(\frac{du}{dy}\right)y'+\left(\frac{du}{dz}\right)z'+\ldots=at^{a-1}f(x',y',z'\ldots).$

Fesons $t=1$, on aura :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)x+\left(\frac{du}{dy}\right)y+\left(\frac{du}{dz}\right)z+\ldots=af(x,y,z,\ldots)=au.$$

Exemp. $u = ax^3 + bxy^2 + \frac{cx^4}{y}$ est une fonction homogène de trois dimensions; on a donc la relation :

$$(3ax^2 + by^2 + \frac{4cx^3}{y})x + (2bxy - \frac{cx^4}{y^2})y = 3(ax^3 + bxy^2 + \frac{cx^4}{y}).$$

(b) *Dérivées et différentielles d'une fonction à plusieurs variables dépendantes.*

§ 11.

Définitions.

Je nommerai équation *principale*, la fonction donnée, et équations *secondaires*, les relations entre les variables dépendantes et les variables indépendantes.

Exemple. Si l'on donne $u = f(x, y, z)$, (1)

et $z = \varphi(v, t)$, $y = \psi(v, t)$, $x = \chi(v, t)$, (2)

la relation (1) sera l'équation principale, et les trois relations (2) seront les équations secondaires.

RÈGLE GÉNÉRALE.

Pour trouver la différentielle d'une fonction de plusieurs variables dépendantes x, y, z, etc., *il faut :*

1) *Différentier les équations, principale, et secondaires,*

2) *Substituer dans la différentielle de l'équation principale, les valeurs de* dx, *de* dy, *de* dz, etc., *données par les différentielles des équations secondaires, et ordonner le résultat par rapport aux différentielles des variables indépendantes.*

1er Probl. *Soit* $u = f(x,y)$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi t$, *trouver* du *et* $\frac{du}{dx}$.

Solut. On a : $du = (\frac{du}{dx})\,dx + (\frac{du}{dy})\,dy$,

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \varphi' t \cdot dt,\quad dy = \frac{dy}{dt}dt = \psi' t \cdot dt;$$

$$\text{donc} \quad du = \left\{ \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \left(\frac{du}{dy}\right) \frac{dy}{dt} \right\} dt,$$

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{du}{dx}\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{du}{dy}\right) \frac{dy}{dt}.$$

2e Probl. *Soient* $u = f(x,y)$, $x = \varphi(v,t)$, $y = \psi(v,t)$,

trouver $du, \left(\frac{du}{dv}\right), \left(\frac{du}{dt}\right)$.

Solut. On a : $du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy$;

$$dx = \left(\frac{dx}{dv}\right) dv + \left(\frac{dx}{dt}\right) dt ; \quad dy = \left(\frac{dy}{dv}\right) dv + \left(\frac{dy}{dt}\right) dt ;$$

donc :

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right)\left[\left(\frac{dx}{dv}\right) dv + \left(\frac{dx}{dt}\right) dt\right] + \left(\frac{du}{dy}\right)\left[\left(\frac{dy}{dv}\right) dv + \left(\frac{dy}{dt}\right) dt\right]$$

$$= \left[\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right)\right] dv + \left[\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)\right] dt$$

$$= \left(\frac{du}{dv}\right) dv + \left(\frac{du}{dt}\right) dt ;$$

donc :

$$\left(\frac{du}{dv}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right),$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

3e Probl. *Soient* $u = f(x,y)$, u *et* y *étant les variables indépendantes, trouver* dx ; $\left(\frac{dx}{du}\right)$, $\left(\frac{dx}{dy}\right)$.

Solut. De l'équation $u = f(x,y)$, on tire par la différentiation :

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy.$$

Divisons cette équation respectivement par du et dy, on aura :

$$\frac{du}{du} = 1 = \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{du} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{du},$$

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{dy} + \left(\frac{du}{dy}\right).$$

Mais si l'on prend la dérivée par rapport à u seul, alors y est constant, donc $\frac{dy}{du} = 0$, et alors la première de ces équations devient : $1 = \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)$; d'où : $\left(\frac{dx}{du}\right) = \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)}$.

Si l'on prend la dérivée par rapport à y seul, alors u est constant, et l'on a $\frac{du}{dy} = 0$; donc la seconde des équations ci-dessus devient :

$$0 = \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right); \text{ d'où : } \left(\frac{dx}{dy}\right) = -\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dx}\right)}.$$

Or x étant fonction de u et de y on a :

$$dx = \left(\frac{dx}{du}\right)du + \left(\frac{dx}{dy}\right)dy.$$

Donc, en substituant à la place des coëfficients $\left(\frac{dx}{du}\right)$, $\left(\frac{dx}{dy}\right)$, leurs valeurs ci-dessus, on aura :

$$dx = \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)} \cdot du - \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dx}\right)} \cdot dy,$$

$$= \frac{du - \left(\frac{du}{dy}\right)dy}{\left(\frac{du}{dx}\right)}.$$

Les coëfficients $\left(\frac{du}{dy}\right), \left(\frac{du}{dx}\right)$, se déduisent immédiatement de la proposée $u = f(x, y)$.

Exemp. On donne $u = x^2y + axy^2$, x étant la variable princi-

pale, chercher dx, $(\frac{dx}{du})$, $(\frac{dx}{dy})$, sans résoudre la proposée par rapport à x.

On a ici :

$$(\frac{du}{dx}) = 2xy + ay^2,\ (\frac{du}{dy}) = x^2 + 2axy;\ \text{donc}$$

$$(\frac{dx}{du}) = \frac{1}{2xy+ay^2},\ (\frac{dx}{dy}) = -\frac{x^2+2axy}{2xy+ay^2};$$

par conséquent : $dx = \frac{du-(x^2+2axy)dy}{2xy+ay^2}$.

4e Probl. *Soient* $u = f(x,y,z)$, $x=\varphi(v,t)$, $y=\psi(v,t)$, $z=\xi(v,t)$,

trouver du, $(\frac{du}{dv})$, $(\frac{du}{dt})$.

Solut. On a : $du = (\frac{du}{dx})dx + (\frac{du}{dy})dy + (\frac{du}{dz})dz$,

$$dx = (\frac{dx}{dv})dv + (\frac{dx}{dt})dt,$$

$$dy = (\frac{dy}{dv})dv + (\frac{dy}{dt})dt,$$

$$dz = (\frac{dz}{dv})dv + (\frac{dz}{dt})dt.$$

$$du = (\frac{du}{dx})[(\frac{dx}{dv})dv + (\frac{dx}{dt})dt] + (\frac{du}{dy})[(\frac{dy}{dv})dv + (\frac{dy}{dt})dt]$$
$$+ (\frac{du}{dz})[(\frac{dz}{dv})dv + (\frac{dz}{dt})dt],$$

$$= [(\frac{du}{dx})(\frac{dx}{dv}) + (\frac{du}{dy})(\frac{dy}{dv}) + (\frac{du}{dz})(\frac{dz}{dv})]dv$$
$$+ [(\frac{du}{dx})(\frac{dx}{dt}) + (\frac{du}{dy})(\frac{dy}{dt}) + (\frac{du}{dz})(\frac{dz}{dt})]dt,$$

$$= (\frac{du}{dv})dv + (\frac{du}{dt})dt.$$

Donc $(\frac{du}{dv}) = (\frac{du}{dx})(\frac{dx}{dv}) + (\frac{du}{dy})(\frac{dy}{dv}) + (\frac{du}{dz})(\frac{dz}{dv})$,

$$(\frac{du}{dt}) = (\frac{du}{dx})(\frac{dx}{dt}) + (\frac{du}{dy})(\frac{dy}{dt}) + (\frac{du}{dz})(\frac{dz}{dt}).$$

5e Probl. *Soit* $u = f(x, y, z)$, x *étant la variable principale, trouver* dx, $(\frac{dx}{du})$, $(\frac{dx}{dy})$, $(\frac{dx}{dz})$, *sans résoudre la proposée par rapport à* x.

Solut. De la proposée on déduit :

$$du = (\frac{du}{dx})dx + (\frac{du}{dy})dy + (\frac{du}{dz})dz ;$$

d'où, en divisant par du, dy, dz,

$$\frac{du}{du} = 1 = (\frac{du}{dx})\frac{dx}{du} + (\frac{du}{dy})\frac{dy}{dx} + (\frac{du}{dz})\frac{dz}{du},$$

$$\frac{du}{dy} = (\frac{du}{dx})\frac{dx}{dy} + (\frac{du}{dy}) + (\frac{du}{dz})\frac{dz}{dy},$$

$$\frac{du}{dz} = (\frac{du}{dx})\frac{dx}{dz} + (\frac{du}{dy})\frac{dy}{dz} + (\frac{du}{dz}).$$

1° Si u varie seul, alors $\frac{dx}{du}$ devient $(\frac{dx}{du})$, et l'on aura $\frac{dy}{du} = 0$, $\frac{dz}{du} = 0$.

Donc la première des équations précédentes donnera :

$$(\frac{dx}{du}) = \frac{1}{(\frac{du}{dx})}.$$

2° Si y varie seul, alors $\frac{dx}{dy}$ devient $(\frac{dx}{dy})$, et l'on a $\frac{du}{dy} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$; la seconde des équations ci-dessus fournira :

$$0 = (\frac{du}{dx})(\frac{dx}{dy}) + (\frac{du}{dy}), \text{ donc } (\frac{dx}{dy}) = -\frac{(\frac{du}{dy})}{(\frac{du}{dx})}.$$

3° Quand z varie seul, on a : $\frac{dx}{dz} = (\frac{dx}{dz})$, $\frac{du}{dz} = 0$, $\frac{dy}{dz} = 0$; et la troisième équation ci-dessus se changera en

$$0 = (\frac{du}{dx})(\frac{dx}{dz}) + (\frac{du}{dz}); \quad \text{d'où : } (\frac{dx}{dz}) = -\frac{(\frac{du}{dz})}{(\frac{du}{dx})}.$$

Mais x étant fonction de y, z, u, on a :

$$dx = (\frac{dx}{du})du + (\frac{dx}{dy})dy + (\frac{dx}{dz})dz\,; \quad \text{donc}$$

$$dx = \frac{du - (\frac{du}{dy})dy - (\frac{du}{dz})dz}{(\frac{du}{dx})}.$$

B.) *Dérivées et différentielles des Ordres supérieurs.*

a.) *Des fonctions de plusieurs variables indépendantes.*

§ 12.

Notations et définitions.

Soit $u = f(x, y, \ldots)$, il est clair que les dérivée partielles $(\frac{du}{dx})$, $(\frac{du}{dy})$, etc., seront, comme u, des fonctions de $x, y, \ldots$ On pourra donc prendre les dérivées partielles de ces dernières expressions aussi bien que de la fonction u.

Ces nouvelles dérivées partielles seront du second ordre, et se marquent ainsi :

$$(\frac{d(\frac{du}{dx})}{dx}) = (\frac{d^2u}{dx^2}),\ (\frac{d(\frac{du}{dx})}{dy}) = (\frac{d^2u}{dxdy}),$$

$$(\frac{d(\frac{du}{dy})}{d^2x}) = (\frac{d^2u}{dydx}),\ (\frac{d(\frac{du}{dy})}{dy}) = (\frac{d^2u}{dy^2}),\ \text{etc.}$$

Les dérivées du second ordre, étant en général des fonctions de $x, y, \ldots$ aussi bien que la fonction primitive, on pourra également prendre les dérivées partielles des dérivées partielles du second ordre; on aura ainsi les dérivées partielles du troisième ordre, qu'on écrit de cette manière :

$$(\frac{d(\frac{d^2u}{dx^2})}{dx}) = (\frac{d^3u}{d^3x}),\ (\frac{d(\frac{d^2u}{dx^2})}{dy}) = (\frac{d^3u}{dxd^2y}),$$

$$(\frac{d(\frac{d^2u}{dxdy})}{dx}) = (\frac{d^3u}{dx^2dy}),\ (\frac{d(\frac{d^2u}{dxdy})}{dy}) = (\frac{d^3u}{dxdy^2});$$

$$\frac{d\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)}{dx}=\left(\frac{d^3u}{dy^2dx}\right),\quad \frac{d\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)}{dy}=\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right),$$

et ainsi de suite, pour les ordres plus élevés.

Il suit de là que les différentielles partielles du second ordre sont indiquées par

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx^2=d^2_xu,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy^2=d^2_yu,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dx\,dy=d^2_{x,y}u,\ \text{etc.}$$

Celles du troisième ordre seront désignées par

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)dx^3=d^3_xu,$$

$$\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)dx^2dy=d^3_{x,x,y}y,$$

$$\left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right)dx^2dy=d^3_{x,y,y}u,$$

$$\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)dy^3=d^3_yu,\ \text{etc.}$$

28e Théor. *Soit* $u=f(x,y)$, *je dis que l'on a :*

$$\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx},\quad \text{ou}\quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)=\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right).$$

Démonst. On a, en effet :

$$1°\quad \left(\frac{du}{dx}\right)dx=f(x+dx,y)-f(x,y);$$

changeons ici y en $y+dy$, et retranchons du résultat la formule précédente, on aura :

$$\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)dx}{dy}dy=\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dxdy=f(x+dx,y+dy)-f(x,y+dy)$$
$$-f(x+dx,y)+f(x,y).\qquad (\alpha$$

2° On a aussi :

$$\left(\frac{du}{dy}\right)dy = f(x, y + dy) - f(x, y);$$

changeons ici x en $x + dx$, et retranchons cette dernière formule du résultat, on aura :

$$\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)dy}{dx}\,dx = \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)dy\,dx = f(x + dx, y + dy) - f(x + dx, y) - f(x, y + dy) + fx, y. \quad (\beta$$

Les seconds membres des formules (α et (β, étant égaux, on en conclut :

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dx\,dy = \left(\frac{d^2u}{dydx}\right)dydx\,,$$

et

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right).$$

Coroll. On déduit de cette relation successivement les suivantes :

$$\frac{d\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)}{dx}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^3u}{dydx^2}\right);$$

$$\frac{d\left(\frac{d^3u}{dy^2dx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{d^3u}{dy\,dx^2}\right)}{dy}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{du^4}{dx^2dy^2}\right) = \left(\frac{d^4u}{dx^2dy^2}\right), \text{ etc.}$$

et en général :

$$\left(\frac{d^{p+q}u}{dx^p dy^q}\right) = \left(\frac{d^{p+q}u}{dy^q dx^p}\right).$$

Il en sera de même pour des fonctions de plus de deux variables, c'est-à-dire qu'il est indifférent dans quel ordre on forme les dérivées partielles consécutives d'une fonction par rapport aux mêmes variables.

29e Théor. *Soit* $u = f(x,y)$ *une fonction de deux variables indépendantes* x, y, *je dis que l'on aura :*

$$(1)\quad d^n u = \left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)dx^n + n\left(\frac{d^n u}{dx^{n-1}dy}\right)dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{d^n u}{dx^{n-2}dx^2}\right)dx^{n-2}dy^2 + \ldots + \left(\frac{d^n u}{dy^n}\right)dy^n;$$

ou symboliquement :

$$d^n u = \left(\frac{d}{dx}\cdot dx + \frac{d}{dy}\cdot dy\right)^n u.$$

Démonst. En effet, si nous différentions de nouveau la formule (1), en considérant les coëfficients $\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)$, $\left(\frac{d^n u}{dx^{n-1}dy}\right)$, etc., comme des fonctions de x et de y, on aura :

$$d^{n+1}u = \left\{\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)dx + \left(\frac{d^{n+1}u}{dx^n dy}\right)dy\right\}dx^n + n\left\{\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^n dy}\right)dx + \left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-1}dy}\right)dy\right\}dx^{n-1}dy$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\left\{\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-1}dy^2}\right)dx + \left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-2}dy^3}\right)dy\right\}dx^{n-2}dy^2 + \ldots +$$
$$\left\{\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)dx + \left(\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}\right)dy\right\}dy^n$$
$$= \left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)dx^{n+1} + (n+1)\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^n dy}\right)dx^n dy$$
$$+ \left\{n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\right\}\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-1}dy^2}\right)dx^{n-1}dy^2 + \ldots + \left(\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}\right)dy^{n+1}$$
$$= \left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)dx^{n+1} + (n+1)\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^n dy}\right)dx^n dy$$
$$+ \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-1}dy^2}\right)dx^{n-1}dy^2 + \ldots + \left(\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}\right)dy^{n+1}.$$

Comme la différentielle $d^{n+1}u$ subit la même loi de formation que la différentielle $d^n u$, il est clair que, si celle-ci est vraie dans un cas, ou pour $n = p$, elle sera vraie pour $n = p+1, p+2$, etc., mais elle subsiste pour $n = 1$, puisqu'on a

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy = \left(\frac{d}{dx}\cdot dx + \frac{d}{dy}\cdot dy\right)^1,$$

donc elle est vraie pour $n = 2, 3, 4$, etc.

Coroll. Si $u = f(x, y, z, \ldots)$ on trouve aisément par induction, la formule symbolique :

$$d^n u = \left(\frac{d}{dx} \cdot dx + \frac{d}{dx} \cdot dy + \frac{d}{dz} \cdot dz + \ldots\right)^n u.$$

b) *Dérivées et différentielles supérieurs des fonctions de plusieurs variables dépendantes.*

§ 13.

30° Théor. *Soit* $u = f(x,y)$, $x = \varphi v$, $y = \psi v$, *l'on aura :*

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dx} = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{dv} + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{d^2x}{dv^2} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dv^2},$$

$$\frac{d^3u}{dv^3} = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)}{dv} = \text{etc.}$$

Démonst. Car on a :

$$\frac{du}{dv} = \left(\frac{du}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dv} + \left(\frac{du}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dv};$$

donc
$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dv} = \frac{d\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dv}\right\}}{dv} + \frac{d\left\{\left(\frac{du}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dv}\right\}}{dv},$$

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{dx}{dv}\cdot\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dv} + \frac{d^2x}{dv^2}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dy}{dv}\cdot\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dv} + \frac{d^2y}{dv^2}\cdot\left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$= \frac{dx}{dv}\left\{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\frac{dx}{dv} + \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\frac{dy}{dv}\right\} + \frac{d^2x}{dv^2}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dy}{dv}\left\{\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)\frac{dx}{dv} + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dv}\right\} + \frac{d^2y}{dv^2}\cdot\left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$= \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{dv} + \frac{d^2x}{dv^2}\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \frac{d^2y}{dv^2}\left(\frac{du}{dy}\right).$$

etc.

31e Théor. *Soient* $u=f(x,y)$, $x=\varphi(r,v)$, $y=\psi(r,v)$, *je dis qu'on aura :*

$$(b)\begin{cases}
\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)=\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dr}=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\frac{dx}{dr}\cdot\frac{dy}{dr}\\
\qquad+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right)^2+\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{d^2x}{dr^2}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dr^2},\\
\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)=\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dv}=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{dv}\\
\qquad+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{d^2x}{dv^2}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dv^2},\\
\left(\frac{d^2u}{drdv}\right)=\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dv}=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\left(\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right)\\
\qquad+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{drdv}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{d^2y}{drdv}\right)\\
\qquad+\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right);\\
d^2u=\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)dv^2+\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)dr^2+2\left(\frac{d^2u}{drdv}\right)drdv,\ \text{etc.}
\end{cases}$$

Démonst. En effet, on a :

$$(a)\begin{cases}
\left(\frac{du}{dr}\right)=\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dr}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right),\\
\left(\frac{du}{dv}\right)=\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right);
\end{cases}$$

donc
$$\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dr}=\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)=\left(\frac{dx}{dr}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dr}+\left(\frac{d^2x}{dr^2}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$+\left(\frac{dy}{dr}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dr}+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{d^2y}{dr^2}\right),$$
$$\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dv}=\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)=\left(\frac{dx}{dv}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dv}+\left(\frac{d^2x}{dv^2}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$+\left(\frac{dy}{dv}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dv}+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{d^2y}{dv^2}\right)$$

$$\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dv} = \left(\frac{d^2u}{dr\,dv}\right) = \left(\frac{dx}{dr}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dv} + \frac{d^2x}{dr\,dv}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$+\left(\frac{dy}{dr}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dv} + \left(\frac{d^2y}{dv\,dr}\right)\left(\frac{du}{dy}\right).$$

Si maintenant on substitue dans ces formules les valeurs

$$\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dr} = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dr}\right) + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dr},$$

$$\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dv} = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\frac{dx}{dv} + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dv},$$

$$\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dr} = \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\left(\frac{dx}{dr}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right),$$

$$\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dv} = \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right),$$

on aura les relations du théorème.

A l'aide des trois coëfficients différentielles partielles du second ordre, on formera ceux du 3^{me} ordre, en exécutant les développements indiqués par les notations :

$$\left(\frac{d^3u}{dr^3}\right) = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)}{dr}, \left(\frac{d^3u}{dr^2dv}\right) = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)}{dv}, \left(\frac{d^3u}{dr\,dv^2}\right) = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)}{dr},$$

$$\left(\frac{d^3u}{dv^3}\right) = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)}{dv}.$$

etc., etc.

1re *Rem. Soit* $u = f(x,y,z)$, x et y *étant les variables indépendantes, on demande les dérivées*

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right), \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right), \text{etc.}, \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right), \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right), \text{etc.}$$

Solut. Comme z est une fonction de x et de y, si cette fonction est donnée on formera immédiatement leurs dérivées partielles de z par des différentiations consécutives. Ces dérivées étant supposées connues, on différentiera les équations

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)\frac{dz}{dy},$$

ce qui donnera :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\left(\frac{df}{dz}\right)}{dx} + \left(\frac{df}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2},$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dy} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\left(\frac{df}{dz}\right)}{dy} + \left(\frac{df}{dz}\right)\frac{d^2z}{dxdy},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{df}{dy}\right)}{dy} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\left(\frac{df}{dz}\right)}{dy} + \left(\frac{df}{dz}\right)\frac{d^2z}{dy^2}.$$

En développant les différentiations indiquées, on passera aux dérivées partielles en posant $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dx}{dy} = 0$, et l'on aura :

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2f}{dzdx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{df}{dz}\right),$$

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^2f}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^2f}{dxdz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{d^2f}{dzdy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right),$$

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2f}{dy}\right) + \left(\frac{d^2f}{dydz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + 2\left(\frac{d^2f}{dzdy}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

2^me. *Rem.* *Soit* $u=f(x,y,z)$, $x=\varphi(r,v,t)$, $y=\psi(r,v,t)$, $z=\xi(r,v,t)$, *on aura d'abord :*

$$\left(\frac{du}{dr}\right)=\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dr}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right),$$

$$\left(\frac{du}{dv}\right)=\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dv}\right),$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right);$$

on formera ensuite les dérivées partielles du second ordre, en développant les opérations indiquées par les notations :

$$\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)=\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dr},\quad \left(\frac{d^2u}{drdv}\right)=\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dv},$$

$$\left(\frac{d^2u}{drdt}\right)=\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dt},\quad \left(\frac{d^2u}{dvdt}\right)=\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dt},$$

$$\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)=\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dv},\quad \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)=\frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{dt},$$

et ainsi de suite.

§ 14.

CHANGEMENT DES VARIABLES INDÉPENDANTES DANS LES FORMULES DIFFÉRENTIELLES PROVENANT DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

Une fonction primitive $u=f(x,y,\ldots)$, dans laquelle $x,y,\ldots$ ont été regardés comme indépendants, a conduit à une relation

$$F=F\left(x,y,\ldots\left(\frac{du}{dx}\right),\left(\frac{du}{dy}\right),\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right),\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right),\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right),\ldots\right),$$

on demande de transformer celle-ci en une autre F_1, dans laquelle $r,v,\ldots$, seraient les variables indépendantes, on suppose qu'entre les anciennes et les nouvelles variables indépendantes, on ait des relations de la forme $x=\varphi(r,v,\ldots)$, $y=\psi(r,v,\ldots)$, etc.

La solution de ce problème général exige que l'on sache expri-

mer les dérivées anciennes

$$(\frac{du}{dx}), (\frac{du}{dy})\ldots, (\frac{d^2u}{dx^2}), (\frac{d^2u}{dy^2}), (\frac{d^2u}{dxdy}), \ldots$$

en fonction des dérivées nouvelles

$$(\frac{du}{dr}), (\frac{du}{dv}), \ldots (\frac{d^2u}{dr^2}), (\frac{d^2u}{dv^2}), (\frac{d^2u}{drdv}), \ldots .$$

Nous allons donner ces expressions, pour une fonction primitive de deux variables, de la forme :

$$u = f(x, y), \quad x = \varphi(r, v), \quad y = \psi(r, v).$$

1re Méthode.

On trouve les valeurs de $(\frac{du}{dx}, (\frac{du}{dy})$, en résolvant les équations (a) du 31e théorème, par rapport à ces dérivées partielles ; et l'on aura de même les valeurs des coëfficients $(\frac{d^2u}{dx^2}), (\frac{d^2u}{dy^2}), (\frac{d^2u}{dxdy})$, en résolvant les équations (b) du même théorème par rapport à ces coëfficients. Cependant la méthode suivante, moins simple en théorie, est préférable dans la pratique.

2me Méthode.

Des équations secondaires $x = \varphi(r, v)$, $y = \psi(r, v)$, on déduit

$$dx = (\frac{dx}{dr})dr + (\frac{dx}{dv})dv, \quad dy = (\frac{dy}{dr})dr + (\frac{dy}{dv})dv.$$

En résolvant ces équations par rapport à dr, dv, on en tire des équations de la forme

$$dr = a_1dx + b_1dy, \quad dv = a_2dx + b_2dy ;$$

et comme on a aussi

$$dr = (\frac{dr}{dx})dx + (\frac{dr}{dy})dy, \quad dv = (\frac{dv}{dx})dx + (\frac{dv}{dy})dy,$$

on aura les valeurs

$$(\frac{dr}{dx}) = a_1, \quad (\frac{dr}{dy}) = b_1, \quad (\frac{dv}{dx}) = a_2, \quad (\frac{dv}{dy}) = b_2.$$

On a donc :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)a_1+\left(\frac{du}{dv}\right)a_2,$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)b_1+\left(\frac{du}{dv}\right)b_2.$$

Quant aux dérivées du second ordre, on aura :

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\left(\frac{dr}{dx^2}\right)\left(\frac{du}{dr}\right)+\left(\frac{dr}{dx}\right)\cdot\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dx}$$

$$+\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)+\left(\frac{dv}{dx}\right)\cdot\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dx}.$$

Or $$\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dx}=\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\frac{d^2u}{drdv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right),$$

$$\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dx}=\left(\frac{d^2u}{dvdr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right),\qquad\text{donc}$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)\left(\frac{du}{dr}\right)+\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)^2+2\left(\frac{d^2u}{drdv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)$$

$$+\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)+\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2.$$

On obtiendra, par des procédés semblables :

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)=\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right)\left(\frac{du}{dr}\right)+\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)\left(\frac{dr}{dy}\right)^2+2\left(\frac{d^2u}{drdv}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dr}{dy}\right)$$

$$+\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)+\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)^2,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)=\left(\frac{d^2r}{dxdy}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)+\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dr}{dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{drdv}\right)\left[\left(\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)\right]+\left(\frac{d^2v}{dxdy}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)+\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right).$$

On formera, par des procédés analogues les dérivées des ordres supérieurs au second ordre, en fonction des dérivées des nouvelles variables. La marche serait encore la même, s'il s'agissait de plus de deux variables. Appliquons ces règles à quelques exemples.

1^er *Exemp.* Soit $F=(\frac{d^2u}{dxdy})+(\frac{d^2u}{dy^2})$, x et y étant les variables indépendantes, trouver ce que devient F, quand r et v deviennent les nouvelles variables indépendantes, on donne :

$$x=r\cos v,\quad y=r\sin v.$$

Soit F_1, l'expression cherchée, on aura :

$$F_1=(\frac{du}{dr})(\frac{d^2r}{dy^2})+(\frac{du}{dv})\left\{(\frac{d^2v}{dy^2})+(\frac{d^2v}{dxdy})\right\}$$
$$+(\frac{d^2u}{dr^2})(\frac{dr}{dy})\left\{(\frac{dr}{dx})+(\frac{dr}{dy})\right\}+(\frac{d^2u}{dv^2})(\frac{dv}{dy})\left\{(\frac{dv}{dx})+(\frac{dv}{dy})\right\}$$
$$+(\frac{d^2u}{dr\,dv})\left\{(\frac{dv}{dy})(\frac{dr}{dx})+(\frac{dr}{dy})(\frac{dv}{dx})+2(\frac{dv}{dy})(\frac{dr}{dy})\right\}.$$

Les équations $x=r\cos v$, $y=r\sin v$, donnent :

$$dx=dr\cos v-r\sin v\,dv,$$
$$dy=dr\sin v+r\cos v\,dv;$$

d'où l'on tire :

$$dr=\cos v\cdot dx+\sin v\cdot dy=(\frac{dr}{dx})dx+(\frac{dr}{dy})dy,$$

$$dv=-\frac{\sin v}{r}\cdot dx+\frac{\cos v}{r}\cdot dy=(\frac{dv}{dx})dx+(\frac{dv}{dy})dy.$$

Donc : $(\frac{dr}{dx})=\cos v$, $(\frac{dr}{dy})=\sin v$,

$$(\frac{dv}{dx})=-\frac{\sin v}{r},\ (\frac{dv}{dy})=\frac{\cos v}{r}.$$

De ces formules on déduit :

$$(\frac{d^2r}{dy^2})=\cos v\,\frac{dv}{dy}=\frac{\cos^2 v}{r},\quad (\frac{d^2v}{dy^2})=\frac{d(\frac{\cos v}{r})}{dy}=-\frac{\sin 2v}{r^2},$$

$$(\frac{d^2v}{dxdy})=\frac{d(\frac{dv}{dy})}{dx}=-\frac{\cos 2v}{r^2};\qquad \text{donc}$$

$$(\frac{dv^2}{dy^2})+(\frac{d^2v}{dxdy})=-\frac{\cos 2v+\sin 2v}{r^2}.$$

On trouve aisément :

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)+2\left(\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dr}{dy}\right)=\frac{\cos 2v}{r}+\sin 2v,$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)=\cos v-\sin v,$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\frac{dr}{dy}\right)=\cos v+\sin v.$$

On a donc :

$$F_1=\frac{\cos^2 v}{r}\left(\frac{du}{dr}\right)-\frac{\sin 2v+\cos 2v}{r^2}\left(\frac{du}{dv}\right)+\sin v(\cos v+\sin v)\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)$$

$$+\frac{\cos v}{r^2}(\cos v-\sin v)\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)+\left(\frac{\cos 2v}{r}+\sin 2v\right)\left(\frac{d^2u}{drdv}\right).$$

2e *Exemp.* On donne

$$F=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+\frac{d^2u}{dz^2}\Big);$$

chercher ce que devient F, quand on change de variables indépendantes, à l'aide des relations

$$x=r\cos v,$$
$$y=r\sin v\cos t,$$
$$z=r\sin v\sin t.$$

Solut. Des relations du 1er ordre :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dz}\right),$$

on déduit les suivantes du 2d ordre :

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)+\left(\frac{dr}{dx}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dx}+\left(\frac{du}{dv}\right)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$

$$+\left(\frac{dv}{dx}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dx}+\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)+\left(\frac{dt}{dx}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{dx},$$

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) + \left(\frac{dr}{dy}\right)\cdot\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dy} + \left(\frac{du}{dv}\right)\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right)$$

$$+ \left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dy} + \left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) + \left(\frac{dt}{dy}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{dy},$$

$$\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right) = \left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{d^2r}{dz^2}\right) + \left(\frac{dr}{dz}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dz} + \left(\frac{du}{dv}\right)\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)$$

$$+ \left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dz} + \left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{d^2t}{dz^2}\right) + \left(\frac{dt}{dz}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{dz}.$$

En ajoutant, il vient :

$$F = \left(\frac{du}{dr}\right)\left\{\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2r}{dz^2}\right)\right\} + \left(\frac{du}{dv}\right)\left\{\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)\right\} + \left(\frac{du}{dt}\right)\left\{\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2t}{dz^2}\right)\right\} +$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dx} + \left(\frac{dv}{dx}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dx} + \left(\frac{dt}{dx}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{dx} +$$

$$\left(\frac{dr}{dy}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dy} + \left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dy} + \left(\frac{dt}{dy}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{dy} +$$

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dz} + \left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dz} + \left(\frac{dt}{dz}\right)\frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{dz}.$$

Mais on a :

$$\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dx} = \left(\frac{d^2u}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right) + \left(\frac{d^2u}{drdv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{d^2u}{drdt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right),$$

$$\frac{d\left(\frac{du}{dv}\right)}{dx} = \left(\frac{d^2u}{dvdr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right) + \left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{d^2u}{dvdt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right),$$

$$\frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{dx} = \left(\frac{d^2u}{dt\,dr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right) + \left(\frac{d^2u}{dt\,dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right),$$

etc., etc.

En substituant ces développements dans l'expression précédente de F, on trouvera :

$$F = \left(\frac{du}{dr}\right)\left\{\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2r}{dz^2}\right)\right\} + \left(\frac{du}{dv}\right)\left\{\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)\right\} + \left(\frac{du}{dt}\right)\left\{\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2t}{dz^2}\right)\right\} +$$

$$\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)\left\{\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right\} + \left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right\} + \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\left\{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dz}\right)^2\right\} +$$

$$2\left(\frac{d^2u}{dr\,dv}\right)\left\{\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dr}{dz}\right)\left(\frac{dv}{dz}\right)\right\} +$$

$$2\left(\frac{d^2u}{dr\,dt}\right)\left\{\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + \left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + \left(\frac{dr}{dz}\right)\left(\frac{dt}{dz}\right)\right\} +$$

$$2\left(\frac{d^2u}{dv\,dt}\right)\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + \left(\frac{dv}{dz}\right)\left(\frac{dt}{dz}\right)\right\}.$$

$$= A\left(\frac{du}{dr}\right) + B\left(\frac{du}{dv}\right) + C\left(\frac{du}{dt}\right) + D\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right) + E\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right) + G\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) +$$

$$2H\cdot\left(\frac{d^2u}{dr\,dv}\right) + 2K\left(\frac{d^2u}{dr\,dt}\right) + 2L\left(\frac{d^2u}{dv\,dt}\right).$$

Il faut maintenant déterminer les valeurs des coëfficients A, B, C, etc., L.

A cet effet, les équations $x = r\cos v$, etc., donnent :

$dx = dr\cos v - r\sin v\cdot dv$,

$dy = dr\sin v\cos t + r\cos t\cos v\,dv - r\sin v\sin t\cdot dt$,

$dz = dr\sin v\sin t + r\cos v\sin t\,dv + r\sin v\cos t.dt$;

d'où l'on tire :

$$dr = \cos v\cdot dx + \cot t\sin v\,dy + \sin v\sin t\,dz$$

$$= \left(\frac{dr}{dx}\right)dx + \left(\frac{dr}{dy}\right)dy + \left(\frac{dr}{dz}\right)dz,$$

$$dv = -\frac{\sin v}{r}dx + \frac{\cos v \cos t}{r}dy + \frac{\cos v \sin t}{r}dz$$

$$= \left(\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{dv}{dy}\right)dy + \left(\frac{dv}{dz}\right)dz,$$

$$dt = \frac{-\sin t}{r\sin v}dy + \frac{\cot t}{r\sin v}dz$$

$$= \left(\frac{dt}{dx}\right)dx + \left(\frac{dt}{dy}\right)dy + \left(\frac{dt}{dz}\right)dz.$$

Donc :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \cos v,\ \left(\frac{dr}{dy}\right) = \cot t \sin v,\ \left(\frac{dr}{dz}\right) \sin v \sin t,$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = -\frac{\sin v}{r},\ \left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{\cos v \cos t}{r},\ \left(\frac{dv}{dz}\right) = \frac{\cos v \sin t}{r},$$

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = 0,\ \left(\frac{dt}{dy}\right) = \frac{-\sin t}{r \sin v},\ \left(\frac{dt}{dz}\right) = \frac{\cos t}{r \sin v}.$$

De ces valeurs on déduit par la différentiation :

$$\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right) = \sin v \left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{\sin^2 v}{r},\ \left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) = \cos t \cos v \left(\frac{dv}{dy}\right)$$

$$- \sin v \sin t \left(\frac{dt}{dy}\right) = \frac{\cos^2 t \cos^2 v}{r} + \frac{\sin^2 t}{r};$$

$$\left(\frac{d^2r}{dz^2}\right) = \sin t \cos v \left(\frac{dv}{dz}\right) + \sin v \cos t \left(\frac{dt}{dz}\right) = \frac{\cos^2 v \sin^2 t}{r} + \frac{\cos^2 t}{r}.$$

Donc $A = \left(\frac{d^2r}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2r}{dz^2}\right) = \frac{2}{r}$.

On a ensuite :

$$B = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) = \frac{\cos v}{r^2 \sin v},$$

$$C = \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2t}{dz^2}\right) = 0,$$

$$D = \left(\frac{dr}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = 1,$$

$$E = \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = \frac{1}{r^2},$$

$$G=\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\left(\frac{dt}{dy}\right)^2+\left(\frac{dt}{dz}\right)^2=\frac{1}{r^2\sin^2 v},$$

$$H=\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dr}{dz}\right)\left(\frac{dv}{dz}\right)=0,$$

$$K=\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)+\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right)+\left(\frac{dr}{dz}\right)\left(\frac{dt}{dz}\right)=0,$$

$$L=\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right)+\left(\frac{dv}{dz}\right)\left(\frac{dt}{dz}\right)=0.$$

On a donc enfin :

$$F=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)=\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)+$$
$$\frac{1}{r^2\sin^2 v}\cdot\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)+\frac{2}{r}\left(\frac{du}{dr}\right)+\frac{\cos v}{r^2\sin v}\left(\frac{du}{dv}\right).$$

§ 15.

CHANGEMENT DES VARIABLES INDÉPENDANTES DANS LES FONCTIONS SOUS DES SIGNES D'INTÉGRATION DOUBLES ET MULTIPLES.

1er Probl. *Étant donnée l'intégrale double*

$$F=\iint f(x,y)\,dx\,dy,$$

dans laquelle x, y *sont les variables indépendantes, chercher ce que devient* F, *quand les nouvelles variables indépendantes sont* ξ et η; *on donne les relations*

$$x=\varphi(\xi,\eta),\quad y=\psi(\xi,\eta). \qquad (1)$$

Solut. 1° En intégrant d'abord par rapport à x, on devra considérer y comme constant, et par conséquent faire $dy=0$. Cela nous donne en différentiant (1) :

$$dx=\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)d\xi+\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)d\eta,$$

$$0=\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)d\xi+\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)d\eta.$$

En éliminant $d\eta$, ces équations nous donnent :

$$dx = \frac{(\frac{d\varphi}{d\xi})(\frac{d\psi}{d\eta}) - (\frac{d\varphi}{d\eta})(\frac{d\psi}{d\xi})}{(\frac{d\psi}{d\eta})} \cdot d\xi.$$

2°. L'intégration par rapport à x étant effectuée, y seul sera variable dans la 2de intégration, on a donc, en regardant ξ comme constant,

$$dy = (\frac{d\psi}{d\eta}) d\eta.$$

On a donc par la multiplication :

$$dx\,dy = \left[(\frac{d\varphi}{d\xi})(\frac{d\psi}{d\eta}) - (\frac{d\varphi}{d\eta})(\frac{d\psi}{d\xi}) \right] d\xi\, d\eta ;$$

donc l'expression cherchée sera :

$$F_1 = \iint f[\varphi(\xi,\eta), \psi(\xi,\eta)] \left[(\frac{d\varphi}{d\xi})(\frac{d\psi}{d\eta}) - (\frac{d\varphi}{d\eta})(\frac{d\psi}{d\xi}) \right] d\xi\, d\eta .$$

Exemple. Changer l'expression

$$F = \iint \sqrt{1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dz}{dy})^2}\, dx\, dy,$$

dans laquelle x, y sont les variables indépendantes, en une autre dans laquelle les nouvelles variables soient r, v, t; on donne les relations :

$$x = r \sin v \cos t,$$
$$y = r \sin v \sin t,$$
$$z = r \cos v.$$

On a ici :

$$dx = \left\{ (\frac{dr}{dt}) \sin v \cos t - r \sin v \sin t \right\} dt + \left\{ (\frac{dr}{dv}) \sin v \cos t + r \cos v \cos t \right\} dv,$$

$$0 = \left\{ (\frac{dr}{dt}) \sin v \sin t + r \sin v \cos t \right\} dt + \left\{ (\frac{dr}{dv}) \sin v \sin t + r \sin t \cos v \right\} dv.$$

Si l'on substitue dans la première de ces équations pour dv sa valeur tirée de la seconde, on a :

$$dx = -\frac{r \sin v}{\sin t} dt.$$

Cherchons la valeur de dy. Pour cela, il faut différentier $y = r \sin u \sin t$, en regardant t comme constant, ce qui donne :

$$dy = \sin t \left\{ r \cos v + \left(\frac{dr}{dv}\right) \sin v \right\} dv.$$

Donc
$$dx dy = -r \sin v \left\{ r \cos v + \left(\frac{dr}{dv}\right) \sin v \right\} dt dv.$$

Il nous reste à transformer le radical. A cet effet, on a :

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy ;$$

donc
$$\left(\frac{dz}{dv}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

De ces équations on déduit par l'élimination :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right) - \left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) - \left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)},$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{\left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) - \left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right)}{\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) - \left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}.$$

Fesons, pour un moment :

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right) - \left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) = V,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dv}\right) - \left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right) = U,$$

$$\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right) = W,$$

on aura $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{V}{W}$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{U}{W}$;

donc $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{1}{W}\sqrt{V^2+U^2+W^2}$.

Mais on a :

$$\left(\frac{dx}{dv}\right) = r\cos v\cos t + \left(\frac{dr}{dv}\right)\sin v\cos t,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = -r\sin v\sin t + \left(\frac{dr}{dt}\right)\sin v\cos t,$$

$$\left(\frac{dy}{dv}\right) = r\cos v\sin t + \left(\frac{dr}{dv}\right)\sin v\sin t,$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = r\sin v\cos t + \left(\frac{dr}{dt}\right)\sin v\sin t,$$

$$\left(\frac{dz}{dv}\right) = -r\sin v + \left(\frac{dr}{dv}\right)\cos v,\quad \left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dr}{dt}\right)\cos v;$$

donc :

$$V = r\left(\frac{dr}{dt}\right)\sin t + r\left\{r\sin v - \left(\frac{dr}{dv}\right)\cos v\right\}\sin v\cos t,$$

$$U = -r\left(\frac{dr}{dt}\right)\cos t + r\left\{r\sin v - \left(\frac{dr}{dv}\right)\cos v\right\}\sin v\sin t,$$

$$W = -r\sin v\left\{r\cos v + \left(\frac{dr}{dv}\right)\sin v\right\},$$

$$V^2+U^2+W^2 = r^2\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{dr}{dv}\right)^2\right]\sin^2 v\right\},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{dr}{dv}\right)^2\right]\sin^2 v}}{-\sin v\left\{r\cos v+\left(\frac{dr}{dv}\right)\cos v\right\}}.$$

Donc, enfin :

$$F = \iint r\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{dr}{dv}\right)^2\right]\sin^2 v}\cdot dt\,du.$$

Coroll. Soit $z = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$, r sera constant, donc

$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = 0,\ \left(\frac{dr}{dv}\right) = 0,$$

et l'on aura : $F = \iint r \sin v \, dt \, du$ = surface indéfinie d'une sphère en coordonnées polaires.

2^me^ PROBL. *Changer l'expression*

$$F = \iiint F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

en une autre dans laquelle les nouvelles variables soient ξ, η, ζ ;

on donne $x = f(\xi, \eta, \zeta)$, $y = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $z = \psi(\xi, \eta, \zeta)$.

Solut. 1° La première des trois intégrations successives de F, devant se faire par rapport à x, on devra regarder y et z comme constants. Donc, en différentiant les trois dernières équations, dans cette hypothèse, on aura :

$$dx = \left(\frac{df}{d\xi}\right) d\xi + \left(\frac{df}{d\eta}\right) d\eta + \left(\frac{df}{d\zeta}\right) d\zeta ;$$

$$0 = \left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right) d\xi + \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right) d\eta + \left(\frac{d\varphi}{d\zeta}\right) d\zeta ,$$

$$0 = \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right) d\xi + \left(\frac{d\psi}{d\eta}\right) d\eta + \left(\frac{d\psi}{d\zeta}\right) d\zeta .$$

Les deux dernières donnent, par l'élimination, des équations de la forme

$$d\eta = \frac{P}{N} d\xi , \quad d\zeta = \frac{Q}{N} d\xi .$$

En substituant ces valeurs dans la première, on aura, pour dx, une valeur de la forme

$$dx = \frac{M}{N} d\xi .$$

2° La seconde intégration devant s'effectuer par rapport à y, il est clair que x, donc son correspondant ξ, et aussi z seront constants. Donc, en différentiant les deux dernières des trois équations secondaires, dans cette hypothèse, on trouvera :

$$dy = \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right) d\eta + \left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right) d\zeta ,$$

$$0 = \left(\frac{d\psi}{d\eta}\right) d\eta + \left(\frac{d\psi}{d\zeta}\right) d\zeta .$$

La dernière donne $d\zeta = -\dfrac{(\frac{d\psi}{d\eta})}{(\frac{d\psi}{d\zeta})} \cdot d\zeta$; en portant cette valeur dans la première, on trouve :

$$dy = \frac{N}{(\frac{d\psi}{d\zeta})} d\eta.$$

3° La troisième intégration se faisant par rapport à z, il est clair que x, y, donc ξ, η, seront constants. On a donc, par la 3me des équations secondaires

$$dz = (\frac{d\psi}{d\zeta}) d\zeta.$$

Donc :

$$dx\,dy\,dz = M\,d\xi\,d\eta\,d\zeta ;$$

par conséquent

$$F = \iiint F(f, \varphi, \psi) M\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Exemp. Soient

$$F = \iiint dx\,dy\,dz ,$$

$$x = r \sin v \cos t,$$

$$y = r \sin v \sin t,$$

$$z = r \cos v ,$$

transformer F.

On a ici :

$$dx = -r \sin t \sin v\,dt + r \cos t \cos v\,dv + \sin v \cos t\,dr,$$

$$0 = r \sin v \cos t\,dt + r \sin t \cos v\,dv + \sin v \sin t \sin v \sin t\,dr,$$

$$0 = -r \sin v\,dv + \cos v\,dr ;$$

d'où :

$$dv = -\frac{\sin v \cos v \cos t}{\sin t} dt, \quad dr = -\frac{r \sin^2 v \cos t}{\sin t} dt ;$$

donc

$$dx = -\frac{r \sin v}{\sin t} dt.$$

On a ensuite :

$$dy = r \sin t \cos v\,dv + \sin v \sin t\,dr ,$$

$$0 = -r \sin v\,dv + \cos v\,dr ;$$

d'où :

$$dr = \frac{r \sin v}{\cos v}\, dv,$$

et

$$dy = \frac{r \sin t}{\cos v}\, dv.$$

On a enfin :

$$dz = \cos v\, dr\ ;$$

donc :

$$F = -\iiint r^2 \sin v\, dt\, dv\, dr.$$

§ 16.

THÉORÈMES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN POUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

THÉORÈME DE TAYLOR.

Soit $u = f(x,y)$, *je dis que l'on aura :*

$$f(x+h, y+k) = u + \left\{\left(\frac{du}{dx}\right)h + \left(\frac{du}{dy}\right)k\right\} + \frac{1}{1\cdot 2}\left\{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)h^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)hk + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)k^2\right\} + \text{etc.} + R\ ;$$

le reste R *ayant pour expression symbolique*

$$R = \frac{d^n f(x+\alpha h, y+\alpha k)}{1\cdot 2 \ldots n}\left\{\frac{h}{d(x+\alpha h)} + \frac{k}{d(y+\alpha k)}\right\}^n,\ 0 < \alpha < 1.$$

Démonst. Soient

$$h = \varepsilon h',\ k = \varepsilon k',\ x+h = x+\varepsilon h' = x',\ y+k = y+\varepsilon k' = y',$$
$$f(x+h, y+k) = f(x+\varepsilon h', y+\varepsilon k',) = \varphi(\varepsilon) = f(x', y');$$

on aura :

$$\left(\frac{dx'}{d\varepsilon}\right) = h',\quad \left(\frac{dy'}{d\varepsilon}\right) = k';$$

pour $\varepsilon = 0$, on aura de plus $x' = x$, $y' = y$.

Mais on a :

$$\varphi(\varepsilon) = f(x', y');\quad \text{donc :}$$

$$\varphi'(\varepsilon) = \frac{df(x'y')}{dx'}\left(\frac{dx'}{d\varepsilon}\right) + \frac{df(x', y')}{dy'}\left(\frac{dy'}{d\varepsilon}\right),$$

$$\varphi''(\varepsilon) = \frac{d^2 f(x', y')}{dx'^2}\left(\frac{dx'}{d\varepsilon}\right)^2 + 2\frac{d^2 f(x', y')}{dx' dy'}\left(\frac{dx'}{d\varepsilon}\right)\left(\frac{dy'}{d\varepsilon}\right) + \frac{d^2 f(x', y')}{dy'^2}\left(\frac{dy'}{d\varepsilon}\right)^2,$$

$$\varphi'''(\varepsilon) = \frac{d^3 f(x', y')}{dx'^3}\left(\frac{dx'}{d\varepsilon}\right)^3 + 3\frac{d^3 f(x', y')}{dx'^2 dy'}\left(\frac{dx'}{d\varepsilon}\right)^2\left(\frac{dy'}{d\varepsilon}\right) + 3\frac{d^3 f(x' y')}{dx' dy'^2}\left(\frac{dx'}{d\varepsilon}\right)\left(\frac{dy'}{d\varepsilon}\right)^2 + \frac{d^3 f(x', y')}{dy'^3}\left(\frac{dy'}{d\varepsilon}\right)^3,$$

etc.

On a donc symboliquement :

$$\varphi'(\varepsilon) = df(x', y')\left\{\frac{h'}{dx'} + \frac{k'}{dy'}\right\}^1,$$

$$\varphi''(\varepsilon) = d^2 f(x', y')\left\{\frac{h'}{dx'} + \frac{k'}{dy'}\right\}^2,$$

$$\varphi'''(\varepsilon) = d^3 f(x', y')\left\{\frac{h'}{dx'} + \frac{k'}{dy'}\right\}^3,$$

etc.

$$\varphi^{(n)}(\varepsilon) = d^n f(x' y')\left\{\frac{h'}{dx'} + \frac{k'}{dy'}\right\}^n. \qquad (a)$$

Donc

$$\frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(\varepsilon) = \frac{1}{1\cdot 2\ldots n} d^n f(x', y')\left\{\frac{\varepsilon h'}{dx'} + \frac{\varepsilon k'}{dy'}\right\}^n$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2\ldots n} d^n f(x', y')\left\{\frac{h}{dx'} + \frac{k}{dy'}\right\}^n. \qquad (b)$$

Si nous faisons $\varepsilon = 0$, dans la fonction (a), il vient :

$$\varphi^{(n)}(0) = d^n f(x, y)\left\{\frac{h'}{dx} + \frac{k'}{dy}\right\}^n;$$

en multipliant par $\frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\ldots n}$, on a :

$$\frac{\varepsilon^n}{1\ldots n}\varphi^{(n)}(0) = \frac{1}{1\ldots n}\cdot d^n f(x, y)\left\{\frac{\varepsilon h'}{dx} + \frac{\varepsilon k'}{dy}\right\}^n,$$

ou : $$\frac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(0) = \frac{1}{1.2..n} d^n f(x, y)\left\{\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right\}^n.$$

Si dans (b) nous changeons ε en $\alpha\varepsilon$, $0 < \alpha < 1$, nous aurons :

$$= \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(\alpha\varepsilon)\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}d^n f(x+\alpha h, y+\alpha k)\left\{\frac{h}{d(x+\alpha h)}\right.$$

$$\left. + \frac{k}{d(y+\alpha k}\right\}^n = \mathrm{R}.$$

Or on a, par le théorème de Maclaurin :

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot\varepsilon + \varphi''(0)\cdot\frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2} + \varphi'''(0)\cdot\frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots +$$

$$\frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(\alpha\varepsilon);\ 0<\alpha<1.$$

On aura donc symboliquement :

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \tfrac{1}{1}df(x,y)\left\{\frac{h}{dx}+\frac{k}{dy}\right\}^1 + \frac{1}{1\cdot 2}d^2f(x,y)$$

$$\left\{\frac{h}{dx}+\frac{k}{dy}\right\}^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}d^3f(x,y)\left\{\frac{h}{dx}+\frac{k}{dy}\right\}^3 + \text{etc.} + \mathrm{R};$$

ou, en remplaçant $f(x,y)$ par u, et les symboles, par la réalité, on aura la formule du théorème.

Coroll. On démontre absolument de la même manière qu'on a en général, et symboliquement :

$$f(x+h, y+k, \ldots w+l) = u + du\left\{\frac{h}{dx}+\frac{k}{dy}+\ldots+\frac{l}{dw}\right\}$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2}d^2u\left\{\frac{h}{dx}+\frac{k}{dy}+\ldots+\frac{l}{dw}\right\}^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}d^3u\left\{\frac{h}{dx}+\frac{k}{dy}\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{l}{dw}\right\}^3 + \ldots + \mathrm{R},$$

$$\mathrm{R} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}d^n f(x+\alpha h, \ldots w+\alpha l)\left\{\frac{h}{d(x+\alpha h)}+\right.$$

$$\left.\frac{k}{d(y+\alpha k)}+\ldots+\frac{l}{d(w+\alpha l}\right\}^n,\ 0<\alpha<1,$$

$u = f(x, y, \ldots w)$.

THÉORÈMES DE MACLAURIN.

Théorème général de Maclaurin.

Si nous changeons, dans la formule précédente, $x, y, \ldots w$, en $a, b, \ldots g$, puis $h, k, \ldots l$, en $x-a$, $y-b, \ldots w-g$, on aura la formule générale de Maclaurin, savoir :

$$f(x,y,\ldots w) = f(a,b,\ldots g) + df(a,b,\ldots g)\left\{\frac{x-a}{da} + \frac{y-b}{db} + \ldots + \frac{w-g}{dg}\right\}^1$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2} d^2 f(a,b,\ldots g)\left\{\frac{x-a}{da} + \frac{y-b}{db} + \ldots + \frac{w-g}{dg}\right\}^2$$
$$+ \text{etc.} + R.$$

$$R = \frac{1}{1\cdot 2\ldots n} d^n f(a+\alpha\overline{x-a}, \ldots g+\alpha\overline{w-g})\left\{\frac{x-a}{d(a+\alpha\overline{x-a}} + \ldots + \frac{w-g}{d(g+\alpha\overline{w-g})}\right\}^n.$$

Pour une fonction de deux variables, on aura le développement effectif :

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{df(a,b)}{da}(x-a) + \frac{df(a,b)}{db}(y-b)$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2}\left\{\frac{d^2 f(a,b)}{da^2}(x-a)^2 + 2\frac{d^2 f(a,b)}{da\,db}(x-a)(y-b) + \frac{d^2 f(a,b)}{db^2}(y-b)^2\right\}$$
$$+ \text{etc.} + R.$$

Les coëfficients $\frac{df(a,b)}{da}$, $\frac{d^2 f(a,b)}{da^2}$, $\frac{df(a,b)}{db}$, $\frac{d^2 f(a,b)}{da\,db}$, etc., expriment les valeurs constantes que l'on obtient, si dans les coëfficients $\frac{df(x,y)}{dx}$, $\frac{d^2 f(x,y)}{dx^2}$, $\frac{df(x,y)}{dy}$, $\frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}$, etc., on change x en a, y en b, après les différentiations.

Théorême particulier de Maclaurin.

Si dans la formule précédente du développement de $f(x,y,\ldots w)$, on fait $a=0$, $b=0$, $\ldots g=0$, après les différentiations, on aura, la formule particulière de Maclaurin. Pour le cas de deux variables elle prend la forme :

$$f(x,y) = A + (Bx + B_1y) + \frac{1}{1\cdot 2}(Cx^2 + 2C_1xy + C_2y^2) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(Dx^3 + 3D_1x^2y + 3D_2xy^2 + D_3y^3) + \text{etc.} + R.$$

Les coëfficients B, B_1, sont les valeurs des dérivées $\frac{df(x,y)}{dx}$, $\frac{df(x,y)}{dy}$, lorsqu'on y fait $x=0$, $y=0$, après les différentiations; de même les C et les D sont les valeurs des dérivées du 2^d et du 3^{me} ordre, pour $x=0$, $y=0$, etc.; enfin A est ce que devient $f(x,y)$ pour les mêmes valeurs des deux variables.

Le reste R, a la forme symbolique :

$$R = \frac{1}{1\cdot 2\ldots n} d^n f(\alpha x, \alpha y)\left\{\frac{x}{d(\alpha x)} + \frac{y}{d(\alpha y)}\right\}^n.$$

§ 17.

Transformation des formules de Taylor et de Maclaurin.

1. TRANSFORMATION DE LA FORMULE DE TAYLOR.

32^{me} Théor. *Soit* $u = f(x)$, *je dis que l'on aura :*

$$f(x+h) - fx = dx\{f'x + f'(x+dx) + f'(x+2dx) + f'(x+3dx) + \ldots + f'(x+h-dx)\},$$

pour toutes les valeurs x., *depuis* x=x, *jusqu'à* x=x+h, *fx étant supposé continu entre ces limites.*

Démonst. Si fx est une fonction continue entre x et $x+h$,

à supprimer le d, ce qui donne fx, puis à ajouter à fx une constante arbitraire c.

Le procédé de l'intégration défini est indiqué par la formule

$$\int_x^{x+h} f'x\,dx = \Big[\, fx+c \,\Big]_x^{x+h} = [f(x+h)+c]-[fx+c] = f(x+h)-fx.$$

Il consiste, comme l'on voit, à remplacer, dans l'intégrale indéfinie x, successivement par la limite supérieure $x+h$, puis par la limite inférieure x, et à retrancher le 2^{d} résultat du premier. Néanmoins, comme on a

$$\int_x^{x+h} f'x\,dx = dx\,\{f'x+f'(x+dx)+f'(x+2dx)+\ldots+f'(x+h)\},$$

ce procédé ne pourra être employé que dans le cas où $f'x$ ne se réduit pas à la forme $\frac{1}{0}$, pour aucune valeur de x, comprise entre les limites x et $x+h$ de l'intégration, c'est-à-dire, il ne pourra s'employer que dans le cas où fx est une fonction qui reste continue entre ces limites.

Coroll. 2. Nous pouvons maintenant donner une autre forme au 1er Théor. des notions préliminaires, compris dans la formule

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(x+\alpha\cdot\Delta x),\quad 0<\alpha<1.$$

En effet, on a $y=fx$, et $\varphi x = f'x$, si l'on pose $\Delta x = h$, on aura :

$$\Delta y = f(x+h)-fx = hf'(x+\alpha\cdot h),\qquad \text{ou :}$$

$$\int_x^{x+h} f'x\,dx = h\,f'(x+\alpha\cdot h).$$

Coroll. 3. Nous pouvons aussi changer les restes R des formules de Taylor et de Maclaurin en intégrales définies. En effet, soit

$$y = f(a-z)+zf'(a-z)+\frac{z^2}{1\cdot 2}f''(a-z)+\ldots+\frac{z^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1}f^{(n-1)}(a-z);$$

on trouve, en différentiant par rapport à z :

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{z^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n)}(a-z),$$

d'où, en intégrant :

$$y = -\frac{1}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\int z^{n-1} f^{(n)}(a-z)dz + c,$$

ou :

$$f(a-z) + z f'(a-z) + \frac{z^2}{1\cdot 2} f''(a-z) + \ldots +$$

$$\frac{z^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} f^{(n-1)}(a-z) = -\frac{1}{1\cdot 2\ldots n-1}\int z^{n-1} f^{(n)}(a-z)dz + c.$$

Fesons $z = h$, $z = 0$ successivement, puis retranchons le 2^{d} résultat du premier, on aura :

$$f(a-h) + h f'(a-h) + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(a-h) + \ldots +$$

$$\frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} f^{(n-1)}(a-h) - f(a) = -\frac{1}{1\cdot 2\ldots n-1}\int_0^h z^{n-1} f^{(n)}(a-z)dz.$$

Remplaçons a par $x+h$, il vient :

$$fx + h f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} f^{(n-1)}x - f(x+h) =$$

$$-\frac{1}{1\cdot 2\ldots n-1}\int_0^h z^{n-1} f^{(n)}(x+h-z)dz,$$

ou :

$$f(x+h) = fx + h f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} f^{(n-1)}x + R,$$

$$R = \frac{1}{1\cdot 2\ldots n-1}\int_0^h z^{n-1} f^{(n)}(x+h-z)dz.$$

Donc la formule de Maclaurin devient :

$$fx = f0 + f'(0)\cdot x + f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + f^{(n-2)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} + R,$$

$$R = \frac{1}{1\cdot 2\ldots n-1}\int_0^x z^{n-1} f^{(n)}(x-z)dz.$$

Coroll. 4. La formule

$$\int_x^{x+h} \varphi x dx = dx\left\{\varphi x + \varphi(x+dx) + \varphi(x+2dx) + \ldots + \varphi\{x+h)\right\}$$

qu'on trouve, en posant $f'x = \varphi x$, se laisse étendre facilement aux fonctions de plusieurs variables. Cherchons, par exemple, la valeur développée de l'intégrale double

$$\int_y^{y+k} dy \int_x^{x+h} \varphi(x,y)dx = \int_y^{y+k}\int_x^{x+h} \varphi(x,y)dxdy.$$

Si nous regardons y comme constant, on a d'abord :

$$\int_x^{x+h} \varphi(x,y)dx = dx \left\{ \varphi(x,y) + \varphi(x+dx,y) + \varphi(x+2dx,y) + \ldots + \varphi(x+h,y) \right\}.$$

On a donc aussi :

$$\int_y^{y+k} dy \int_x^{x+h} \varphi(x,y)dx = dx \left\{ \int_y^{y+k} \varphi(x.y)dy + \int_y^{y+k} \varphi(x+dx,y)dy + \int_y^{y+k} \varphi(x+2dx,y) + \ldots + \int_y^{y+k} \varphi(x+h,y)dy \right\}.$$

Donc, en développant chaque intégrale du 2^d membre, on trouve enfin :

$$\begin{aligned}\int_y^{y+k}\int_x^{x+h} \varphi(x,y)dxdy = dxdy \{ & \varphi(x,y) + \varphi(x+dx,y) + \ldots + \varphi(x+h,y) \\ & + \varphi(x,y+dy) + \varphi(x+dx,y+dy) + \ldots + \varphi(x+h,y+dy) \\ & + \varphi(x,y+2dy) + \varphi(x+dx,y+2dy) + \ldots + \varphi(x+h,y+2dy) \\ & + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\ & + \varphi(x,y+k) + \varphi(x+dx,y+k) + \ldots + \varphi(x+h,y+k) \}\end{aligned}$$

2. TRANSFORMATION DE LA FORMULE GÉNÉRALE DE MACLAURIN.

Si dans la formule (A), nous changeons x en a, et h, en $x-a$, elle deviendra :

$$f(x) - f(a) = da \{ f'a + f'(a+da) + f'(a+2da) + \ldots + f'x - da) \}.$$

Ou en posant $f'x = \varphi x = \dfrac{dfx}{dx}$,

$$\int_a^x \varphi x dx = da \left\{ \varphi a + \varphi(a+da) + \varphi(a+2da) + \ldots + \varphi(x-da) \right\}.$$

Pour $x = b$, on a, en outre :

$$\int_a^b \varphi x dx = da \left\{ \varphi a + \varphi(a+da) + \varphi(a+2da) + \ldots + \varphi(b-da) \right\}.$$

$$= f(b) - f(a).$$

Soit $a = 0$, on aura la transformation de la formule particulière de Maclaurin, savoir :

$$\int_0^x \varphi x dx = da \left\{ \varphi(0) + \varphi(da) + \varphi(2da) + \ldots + \varphi(x-da) \right\},$$

$$\int_0^b \varphi x dx = da \left\{ \varphi(0) + \varphi(da) + \varphi(2da) + \ldots + \varphi(b-da) \right\}.$$

Coroll. Soit $a < c < b$, on démontre facilement que

$$\int_a^b \varphi x dx = \int_a^c \varphi x dx + \int_c^b \varphi x dx.$$

Donc pour $a = b$, on aura

$$\int_b^b \varphi x dx = 0 = \int_b^c \varphi x dx + \int_c^b \varphi x dx; \qquad \text{d'où :}$$

$$\int_c^b \varphi x dx = -\int_b^c \varphi x dx.$$

§ 18.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES INTÉGRALES.

1. INTÉGRALES INDÉFINIES.

Soit $y = \int f'x dx$, il est clair que $dy = f'x dx$, et que l'on a, en conséquence :

$$d \int f'x dx = \int d(f'x dx) = f'x dx.$$

2. INTÉGRALES DÉFINIES.

Soit l'intégrale définie

$$y = \int_a^b \varphi x\, dx\,,$$

a, b, x, étant considérés comme des fonctions d'une variable indépendante r, on demande la dérivée de y par rapport à r. Il y aura plusieurs cas à distinguer selon que a, b, x sont chacun seul une fonction de r, ou qu'ils le sont ensemble, ou deux à deux.

1er Probl. a *étant fonction de* r *trouver* $\frac{dy}{dr}$.

Solut. On a :

$$y = \int_a^b \varphi x dx = da \left\{ \varphi a + \varphi(a + da) + \text{etc.} \right\} ;$$

donc a étant fonction de r, il suit que y sera fonction de r; on peut donc écrire :

$$y = \psi(r) = \int_a^b \varphi x\, dx\,,$$

et l'on aura :

$$dy = d_\varphi r = \psi(r + dr) - \psi r = \int_{a+da}^{b} \varphi x dx - \int_a^b \varphi x\, dx$$

$$= \int_{a+da}^{b} \varphi x dx - \left[\int_a^{a+da} \varphi x dx + \int_{a+da}^{b} \varphi x dx \right]$$

$$dy = - \int_a^{a+da} \varphi x dx$$

$= -[a + da - a]\, \varphi[a + \alpha(a + da - a)]$, $0 < \alpha < 1$, (Corol. 2, § 17).

$= - da\, \varphi[a + \alpha\, da]$

$= - da \cdot \varphi a$;

d'où : $\frac{dy}{da} = \frac{d \int_a^b \varphi x dx}{da} = - \varphi(a)$, et

$$\frac{dy}{dr} = \frac{d\int_a^b \varphi x\,dx}{dr} = -\frac{da}{dr}\varphi(a).$$

2^me^ PROBL. b *étant seul variable, ou fonction de* r, *trouver* $\frac{dy}{dr}$.

Solut. On a :

$$\int_a^b \varphi x dx = -\int_b^a \varphi x dx;$$

donc $$\frac{dy}{dr} = -\frac{d\int_b^a \varphi x dx}{dr} = +\frac{db}{dr}\varphi(b);$$

donc aussi : $$\frac{dy}{db} = +\varphi(b).$$

3^me^ PROBL. x *étant seul variable, ou fonction de* r, *trouver* $\frac{dy}{dr}$.

Solut. Soit $y = \int_a^b \varphi(x,r)dx$ donc

$$y + dy = \int_a^b \varphi(x, r + dr)dx$$

$$= \int_a^b [\varphi(x,r)dx + \frac{d\varphi(x,r)dx}{dr} \cdot dr]$$

$$= y + dr\int_a^b \varphi'(x,r)dx;$$

$$dy = dr\int_a^b \varphi'(x,r)dx,$$

$$\frac{dy}{dr} = \int_a^b \varphi'(x,r)dx = \int_a^b \frac{d\varphi(x,r)}{dr} \cdot dx.$$

Donc, quand on a $y = \int_a^b \varphi x\, dx$, x variant seul, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = \int_a^b \varphi' x\, dx.$$

4^me^ PROBL. a, b, x *sont variables à la fois, ou des fonctions de* r, *trouver* $\frac{dy}{dr}$.

Soit $y = \int_a^b \varphi(x,r)dx$, y sera une fonction de a, b, r, donc

$$dy = \left(\frac{dy}{dr}\right)dr + \left(\frac{dy}{da}\right)da + \left(\frac{dy}{db}\right)db,$$

$$\frac{dy}{dr} = \left(\frac{dy}{dr}\right) + \left(\frac{dy}{da}\right)\frac{da}{dr} + \left(\frac{dy}{db}\right)\frac{db}{dr}. \quad (1)$$

Mais on a :

$$\left(\frac{dy}{dr}\right) = \int_a^b \frac{d\varphi(x,r)}{dr}\, dx, \quad \left(\frac{dy}{da}\right) = -\varphi(a,r), \quad \left(\frac{dy}{db}\right) = \varphi(b,r),$$

donc (1) devient :

$$\frac{d\int_a^b \varphi(x,r)dx}{dr} = -\varphi(a,r)\frac{da}{dr} + \varphi(b,r)\frac{db}{dr} + \int_a^b \frac{d\varphi(x,r)}{dr} \cdot dx.$$

II^e SECTION.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS IMPLICITES, OU DES ÉQUATIONS, ET TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Nous partageons cette Section en deux Chapitres, dans le I^er nous exposerons les règles pour la différentiation des équations, et dans le II^me, nous donnerons les propriétés relatives aux transformations des équations différentielles.

CHAPITRE I^er.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS IMPLICITES.

§ 19.

(A) ON DONNE UNE SEULE ÉQUATION.

Lorsqu'on donne m équations entre $n > m$ variables, le nombre des variables principales ou dépendantes sera m, et celui des variables indépendantes sera $n-m$, les inconnues seront toujours les dérivées des variables principales par rapport à chacune des variables indépendantes.

1^er PROBL. *Étant donné* $f = f(x,y) = 0$, x *étant la variable indépendante, trouver* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, *etc., sans résoudre l'équation* $f=0$, *par rapport à* y.

Solut. 1° Soient, pour abréger, $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2p}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = r$, etc.

On aura :

$$df=(\frac{df}{dx})dx+(\frac{df}{dy})dy=0.$$

Divisons par dx, on a :

$$\frac{df}{dx}=(\frac{df}{dx})+(\frac{df}{dy})\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{dy}{dx}=p=-\frac{(\frac{df}{dx})}{(\frac{df}{dy})}.$$

2° Cherchons $\frac{d^2y}{dx^2}=q.$

A cet effet, différentions l'équation

$\frac{df}{dx}=(\frac{df}{dx})+(\frac{df}{dy})p=0$, et divisons par dx, on aura :

$$\frac{d^2f}{dx^2}=(\frac{d^2f}{dx^2})+2(\frac{d^2f}{dx\,dy})p+(\frac{d^2f}{dy^2})p^2+(\frac{df}{dy})q=0. \qquad (\alpha)$$

En résolvant cette équation par rapport à q, et en mettant, à la place de p, sa valeur ci-dessus, on aura la dérivée $\frac{d^2y}{dx^2}$ qu'on demande.

En différentiant de nouveau l'équation (α), et en divisant le résultat par dx, on aura la valeur développée de $\frac{d^3f}{dx^3}=0$, dans laquelle entrera $r=\frac{d^3y}{dx^3}$; on trouvera donc r en résolvant cette dernière équation par rapport à cette inconnue. On continuera ainsi pour tous les autres ordres.

Exemp. $f=y^2-xy+2=0$, donne :

$$\frac{df}{dx}=-y+(2y-x)p=0,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}=-2p+2p^2+(2y-x)q=0,$$

$$\frac{d^3f}{dx^3}=-3q+6pq+(2y-x)r=0,\ \text{etc.}$$

De ces équations on tire respectivement .

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x},$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y(y-x)}{(2y-x)^3},$$

$$r = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6(x-y)yx}{(2y-x)^5},$$

etc. etc.

Les inconnues p, q, r, etc. sont exprimées en fonction de x et de y, pour les obtenir en x seul, il faudra en éliminer y à l'aide de l'équation primitive.

2^me^ PROBL. *z étant la variable principale, déduire de la relation* $f=f(x,y,z)=0$, *les dérivées de* z *du* 1^er^, 2^e^, 3^e^, *etc., ordre par rapport à* x *et à* y, *et construire à l'aide de ces dérivées partielles, les différentielles totales de* z *pour les divers ordres.*

1° DÉRIVÉES DU 1^er^ ORDRE.

Solut. z étant une fonction de x et de y, on a d'abord

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy.$$

Mais f étant une fonction de x, y, z, on a :

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy + \left(\frac{df}{dz}\right)dz = 0.$$

Substituons pour dz sa valeur, puis mettons les facteurs dx et dy en évidence, on aura :

$$df = \left\{\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{df}{dz}\right)\right\}dx + \left\{\left(\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}dy = 0,$$

ou :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left\{\left(\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (1)$$

ou :

$$\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\}\frac{dx}{dy} + \left(\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0. \qquad (2)$$

Si nous regardons x seul comme variable, on a :

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

alors (1) donne :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0. \qquad (\alpha$$

Si y varie seul, alors x sera constant, et l'on aura

$$\frac{dx}{dy}=0\,;$$

donc l'équation (2) donnera :

$$\left(\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0. \qquad (\beta$$

Les équations (α et (β, donnent, pour les dérivées inconnues du 1er ordre, les valeurs

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dz}\right)},\quad \left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{df}{dz}\right)}.$$

La différentielle totale

$$dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy\,,$$

devient par conséquent :

$$dz=-\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)dx+\left(\frac{df}{dy}\right)dy.}{\left(\frac{df}{dz}\right)}.$$

2° DÉRIVÉES PARTIELLES ET DIFFÉRENTIELLES TOTALES DU 2^{d} ORDRE.

Posons, pour abréger :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=p,\ \left(\frac{dz}{dy}\right)=q,$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\left(\frac{dp}{dx}\right)=r,\ \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=\left(\frac{dp}{dy}\right)=\left(\frac{dq}{dx}\right)=s,$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=\left(\frac{dq}{dy}\right)=t.$$

On a, par le 1er Ordre :

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{df}{dx}\right)+p\left(\frac{df}{dz}\right)=0,\ \frac{df}{dy}=\left(\frac{df}{dy}\right)+q\left(\frac{df}{dz}\right)=0.$$

De ces équations on déduit, par la différentiation :

$$d\frac{df}{dx} = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d(\frac{df}{dx})}{dx} + p\frac{d(\frac{df}{dz})}{dx} + (\frac{df}{dz})(\frac{dp}{dx})$$

$$= (\frac{d^2f}{dx^2}) + 2p(\frac{d^2f}{dxdz}) + p^2(\frac{d^2f}{dz^2}) + (\frac{df}{dz})r = 0,$$

$$d\frac{df}{dy} = \frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d(\frac{df}{dx})}{dy} + p\frac{d(\frac{df}{dz})}{dy} + (\frac{df}{dz})(\frac{dp}{dy})$$

$$= (\frac{d^2f}{dxdy}) + p(\frac{d^2f}{dydz}) + q(\frac{d^2f}{dxdz}) + pq(\frac{d^2f}{dz^2}) + s(\frac{df}{dz}) = 0,$$

$$d\frac{df}{dy} = \frac{d(\frac{df}{dy})}{dy} + q\frac{d(\frac{df}{dz})}{dy} + (\frac{df}{dz})(\frac{dq}{dy})$$

$$= (\frac{d^2f}{dy^2}) + 2q(\frac{d^2f}{dydz}) + q^2(\frac{d^2f}{dz^2}) + t(\frac{df}{dz}) = 0.$$

De ces trois équations il faut ensuite déduire, par la résolution algébrique, les valeurs des trois inconnues r, s et t. Ces valeurs déterminées, on les portera dans la formule

$$d^2z = d\{pdx + qdy\} = dx\left\{\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy\right\} + dy\left\{\frac{dq}{dx}dx + \frac{dq}{dy}dy\right\}$$

$$= rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2,$$

et l'on aura la différentielle totale du 2^d ordre.

3° DÉRIVÉES PARTIELLES ET DIFFÉRENTIELLE TOTALE DU 3^e ORDRE.

Posons pour abréger :

$$(\frac{d^3z}{dx^3}) = (\frac{dr}{dx}) = v,\ (\frac{d^3z}{dx^2dy}) = (\frac{dr}{dy}) = (\frac{ds}{dx}) = w,$$

$$(\frac{d^3z}{dxdy^2}) = (\frac{ds}{dy}) = (\frac{dt}{dx}) = \sigma,$$

$(\frac{d^3z}{dy^3}) = (\frac{dt}{dy}) = \tau$, l'on trouvera les quatre équations :

$$\frac{d.\frac{d^2f}{dx^2}}{dx}=\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)+3p\left(\frac{d^3f}{dzdx^2}\right)+3p^2\left(\frac{d^3f}{dz^2dx}\right)+p^3\left(\frac{d^3f}{dz^3}\right)+$$
$$3\left[\left(\frac{d^2f}{dzdx}\right)+p\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)\right]r+\left(\frac{df}{dz}\right)v=0,$$

$$\frac{d.\frac{d^2f}{dx^2}}{dy}=\left(\frac{d^3f}{dx^2dy}\right)+2p\left(\frac{d^3f}{dxdydz}\right)+p^2\left(\frac{d^3f}{dz^2dy}\right)+$$
$$q\left[\left(\frac{d^3f}{dx^2dz}\right)+2p\left(\frac{d^3f}{dzdx}\right)+p^2\left(\frac{d^3f}{dz^3}\right)\right]+\left[\left(\frac{d^2f}{dzdy}\right)+q\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)\right]r+$$
$$2s\left[\left(\frac{d^2f}{dzdx}\right)+p\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)\right]+\left(\frac{df}{dz}\right)w=0,$$

$$\frac{d.\frac{d^2f}{dy^2}}{dx}=\left(\frac{d^3f}{dydx}\right)+2\left(\frac{d^3f}{dzdydz}\right)q+\left(\frac{d^3f}{dz^2dx}\right)q^2+$$
$$\left[\left(\frac{d^3f}{dy^2dz}\right)+2\left(\frac{d^3f}{dzdy}\right)q+\left(\frac{d^3f}{dz^3}\right)q^2\right]p+\left[\left(\frac{d^2f}{dzdx}\right)+p\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)\right]t+$$
$$2s\left[\left(\frac{d^2f}{dzdy}\right)+q\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)\right]+\left(\frac{df}{dz}\right)\cdot\sigma=0,$$

$$\frac{d.\frac{d^2f}{dy^2}}{dy}=\left(\frac{d^3f}{dy^3}\right)+3\left(\frac{d^3f}{dzdy^2}\right)q+3\left(\frac{d^3f}{dz^2dy}\right)q^2+\left(\frac{d^3f}{dz^3}\right)q^3+$$
$$3\left[\left(\frac{d^2f}{dzdy}\right)+q\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)\right]t+\left(\frac{df}{dz}\right)\cdot\tau=0.$$

Exemp. Soit $f=z^3+xy^2-x=0$, on a, pour le 1^er^ ordre :

$$\frac{df}{dx}=3z^2p+y^2-1=0,\ p=\frac{1-y^2}{3z^2},$$
$$\frac{df}{dy}=3z^2q+2xy=0,\ q=\frac{-2xy}{3z^2}.$$

Pour le 2^d^ ordre on a :

$$\frac{d^2f}{dx^2}=3z^2r+6p^2z=0,\ r=\frac{4y^2-2y^4-2}{9z^5},$$
$$\frac{d^2f}{dydx}=3z^2s+6pqz+2y=0,\ s=\frac{2y(2y-2z+3z^3)}{9z^5},$$
$$\frac{d^2f}{dy^2}=3z^2t+6zq^2+2x=0,\ t=\frac{2x(2y-z)}{3z^3}.$$

(B) ON DONNE PLUS D'UNE ÉQUATION.

1er PROBL. y *et* z *étant les variables principales,* x *par conséquent la variable indépendante, des équations simultanées*

$$u = f(x,y,z) = 0, \quad w = \varphi(x,y,z) = 0,$$

déduire les dérivées de y *et de* z *des divers ordres, ainsi que les différentielles de ces variables.*

1° DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DU 1er ORDRE.

Solut. En différentiant u et w, considérés comme des fonctions de x, y, z, puis en divisant par dx, on a les relations :

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{df}{dz}\right)\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{dw}{dx} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\frac{dz}{dx} = 0.$$

De ces équations il faut tirer, par l'élimination, les valeurs des dérivées inconnues

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}.$$

2° DÉRIVÉES DU 2d ORDRE.

On obtient facilement par la différentiation :

$$d\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)\frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{d^2f}{dxdz}\right)\frac{dz}{dx} + 2\left(\frac{d^2f}{dzdy}\right)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{df}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

$$d\frac{dw}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} = \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)\frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{d^2\varphi}{dxdz}\right)\frac{dz}{dx} + 2\left(\frac{d^2\varphi}{dydz}\right)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

Ces équations feront connaître, par leur résolution algébrique, les valeurs des dérivées inconnues du 2d ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}.$$

2me Probl. *Étant données les deux équations simultanées*

$$u = f(x, y, z, t) = 0, \quad w = \varphi(x, y, z, t) = 0,$$

z et t étant les variables principales, trouver les dérivées partielles des divers ordres de z *et de* t, *par rapport à chacune des variables indépendantes* x *et* y.

1° dérivées partielles du 1er ordre.

Solut. Ces dérivées sont au nombre de quatre, savoir :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right), \left(\frac{dt}{dx}\right), \left(\frac{dt}{dy}\right).$$

Il faut, par conséquent, quatre équations pour les déterminer.

La première équation donnera d'abord :

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{df}{dz}\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{df}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = 0, \qquad (1$$

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{dx}{dy} + \left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)\frac{dz}{dy} + \left(\frac{df}{dt}\right)\frac{dt}{dy} = 0. \qquad (2$$

Si x doit varier seul, y sera constant, et l'on aura $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dt}{dx}\right)$; donc l'équation devient, dans cette hypothèse :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) = 0. \qquad (\alpha$$

Si y varie seul, x sera constant, on aura par conséquent

$$\frac{dx}{dy} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = \left(\frac{dz}{dy}\right), \quad \frac{dt}{dy} = \left(\frac{dt}{dy}\right),$$

et l'équation (2 fournira :

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) = 0. \qquad (\beta$$

En traitant de la même manière l'équation $w=0$, on en déduira les deux suivantes :

$$(\frac{dw}{dx})=(\frac{d\varphi}{dx})+(\frac{d\varphi}{dz})(\frac{dz}{dx})+(\frac{d\varphi}{dt})(\frac{dt}{dx})=0, \qquad (\nu$$

$$(\frac{dw}{dy})=(\frac{d\varphi}{dy})+(\frac{d\varphi}{dz})(\frac{dz}{dy})+(\frac{d\varphi}{dt})(\frac{dt}{dy})=0; \qquad (\delta$$

$(\alpha$, $(\beta$, $(\nu$, $(\delta$, sont les quatre équations cherchées. Les différentielles de t et de z s'obtiennent ensuite par les relations :

$$dz=(\frac{dz}{dx})dx+(\frac{dz}{dy})dy,$$

$$dt=(\frac{dt}{dx})dx+(\frac{dt}{dy})dy.$$

2° DÉRIVÉES DU 2^{d} ORDRE.

Les dérivées du second ordre s'obtiendront, en développant les équations indiquées par les notations :

$$\frac{d(\frac{du}{dx})}{dx}=(\frac{d^2u}{dx^2})=0, \quad \frac{d(\frac{du}{dx})}{dy}=(\frac{d^2u}{dxdy})=0,$$

$$\frac{d(\frac{du}{dy})}{dy}=(\frac{d^2u}{dy^2})=0, \quad \frac{d(\frac{dw}{dx})}{dx}=(\frac{d^2w}{dx^2})=0,$$

$$\frac{d(\frac{dw}{dx})}{dy}=(\frac{d^2w}{dxdy})=0, \quad \frac{d(\frac{dw}{dy})}{dy}=(\frac{d^2w}{dy^2})=0.$$

On emploiera des procédés semblables, pour déduire les dérivées du 3^{me} ordre de celles du 2^{d}, et ainsi de suite, pour les ordres plus élevés.

§ 20.

THÉORÈMES DE LAPLACE, DE LAGRANGE, D'EULER ET DE PAOLI POUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS IMPLICITES.

THÉORÈME GÉNÉRAL DE LAPLACE.

z étant une fonction implicite de α, définie par l'équation

$$z = \psi(x + \alpha fz),$$

je dis que l'on aura :

$$(a). \quad Fz = F(\psi x) + \alpha F'(\psi x)\cdot f(\psi x) + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d[F'(\psi x)\cdot \overline{f(\psi x)}^2]}{dx} + \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2[F'(\psi x)\cdot \overline{f(\psi x)}^3]}{dx^2} + \text{etc.}$$

Démonst. Soit $F^{(n)}(0)$ ce que devient le coëfficient différentiel $\frac{d^n F(x)}{d\alpha^n}$, lorsqu'on y pose $\alpha = 0$, après le développement, on aura, par le théorème de Maclaurin :

$$Fz = F(0) + F'(0)\alpha + F''(0)\frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + F'''(0)\cdot\frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}, \quad (k)$$

$F(0)$, étant ce que devient Fz, pour $\alpha = 0$.

Nous avons donc à chercher les valeurs des facteurs

$$F(0),\ F'(0),\ F''(0),\ F'''(0),\ \text{etc.},\ F^{(n)}(0).$$

1° CHERCHER F(0).

Comme on a $F(z) = F[\psi(x + \alpha fz)]$, on aura

$$F(0) = F[\psi x].$$

2° CHERCHER F'(0).

1. Différentiez $z = \psi(x + \alpha fz)$ par rapport à α, on a :

$$\frac{dz}{d\alpha} = \psi'(x + \alpha fz)\left[\alpha f'z\cdot\frac{dz}{d\alpha} + fz\right]$$

$$= \alpha\psi'(x + \alpha fz)\frac{dz}{d\alpha}f'z + \psi'(x + \alpha fz)\cdot fz, \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{fz.\psi'(x+\alpha fz)}{1-\alpha\psi'(x+\alpha fz)f'z}. \qquad (\alpha$$

2. Différentiez $z=\psi(x+\alpha fz)$, par rapport à x, on a :

$$\frac{dz}{dx} = \psi'(x+\alpha fz)\left\{1+\alpha f'z.\frac{dz}{dx}\right\}$$

$$= \psi'(x+\alpha fz)+\alpha\psi'(x+\alpha fz).\frac{dz}{dx}, \qquad \text{d'où :}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\psi'(x+\alpha fz)}{1-\alpha\psi'(x+\alpha fz).f'z}. \qquad (\beta$$

Des équations (α et (β on déduit, par la division :

$$\frac{\frac{dz}{d\alpha}}{\frac{dz}{dx}} = fz, \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{d\alpha} = fz.\frac{dz}{dx}. \qquad (\gamma$$

3. Comme on a :

$$\frac{dFz}{d\alpha} = \frac{dFz}{dz}.\frac{dz}{d\alpha},$$

en substituant la valeur ci-dessus de $\frac{dz}{d\alpha}$, il vient :

$$\frac{dFz}{dx} = \frac{dFz}{dz}.\frac{dz}{dx}.fz = \frac{dFz}{dx}.fz. \qquad (\delta$$

Mais $z=\psi(x+\alpha fz)$, pour $\alpha=0$, donne $z=\psi x$, donc

$\frac{dFz}{dx}$, en y faisant $\alpha=0$, devient $\frac{dF(\psi x)}{dx}.f(\psi x)$;

on a donc

$$F'(0) = \frac{dF(\psi x)}{dx}.f(\psi x) = F'(\psi x).f(\psi x).$$

3° Chercher $F''(0)$.

1. Différentiez l'équation (γ par rapport à x, il viendra :

$$\frac{d^2z}{d\alpha dx} = \frac{dfz}{dz}.\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + fz.\frac{d^2z}{dx^2}. \qquad (\varepsilon$$

2. Cela posé, je dis que l'on a généralement :

$$\frac{d[\varphi z \cdot \frac{dz}{dx}]}{d\alpha} = \frac{d[\varphi z . fz . \frac{dz}{dx}]}{dx} . \qquad (\eta$$

Car on a :

$$\frac{d[\varphi z \cdot \frac{dz}{dx}]}{d\alpha} = \frac{d\varphi z}{dz} \cdot \frac{dz}{d\alpha} \cdot \frac{dz}{dx} + \varphi z \cdot \frac{d^2 z}{dx\,dx} ; \qquad (\xi$$

Mettons ici les valeurs données par (ν et par (ε, on aura :

$$\frac{d[\varphi z \cdot \frac{dz}{dx}]}{d\alpha} = \frac{d\varphi z}{dz} \cdot fz \cdot (\frac{dz}{dx})^2 + \varphi z \cdot \frac{df z}{dz} (\frac{dz}{dx})^2 + \varphi z \cdot fz \cdot \frac{d^2 z}{dx^2}$$

$$= \frac{d[\varphi z \cdot fz \cdot \frac{dz}{dx}]}{dx} .$$

3. Différentions maintenant l'équation (δ par rapport à α, nous trouverons :

$$\frac{d^2 Fz}{d\alpha^2} = \frac{d[\frac{dFz}{dz} \cdot fz \cdot \frac{dz}{dx}]}{d\alpha} .$$

Donc, si nous posons $\varphi z = \frac{dFz}{dz} \cdot fz$, on trouvera, par la formule (η :

$$\frac{d^2 Fz}{d\alpha^2} = \frac{d[\frac{dFz}{dz} \cdot fz \cdot \frac{dz}{dx}]}{d\alpha} = \frac{d[\frac{dFz}{dx} \cdot \overline{fz^2}]}{dx} = \frac{d[F'z \cdot \overline{fz^2}]}{dx} . \qquad (\theta$$

Comme z devient ψx, pour $\alpha = 0$, l'on voit que $\frac{d^2 Fz}{d\alpha^2}$, deviendra, pour $\alpha = 0$:

$$F''(0) = \frac{d[F'(\psi x) \cdot \overline{f(\psi x)^2}]}{dx} .$$

4° Chercher $F'''(0)$.

Différentions (θ par rapport à α, on a :

$$\frac{d^3Fz}{d\alpha^3} = \frac{d\left\{\frac{d[\frac{dFz}{dz}\cdot\overline{fz}^2\cdot\frac{dz}{dx}]}{dx}\right\}}{d\alpha} = \frac{d\left\{d\left\{\frac{dFz}{dz}\cdot\overline{fz}^2\cdot\frac{dz}{dx}\right\}\right\}}{dx}.$$

Mais en faisant dans (γ, $\varphi x = \frac{dF}{dz}\cdot\overline{fz}^2$, l'équation précédente, à cause de cette relation (γ, deviendra :

$$\frac{d^3Fz}{d\alpha^3} = \frac{d\left\{d[\frac{dFz}{dz}\cdot\overline{fz}^3\cdot\frac{dz}{dx}]\right\}}{dx} = \frac{d^2[\frac{dFz}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\overline{fz}^3]}{dx^2}$$

$$= \frac{d^2[\frac{dFz}{dx}\cdot\overline{fz}^3]}{dx^2}.$$

Donc, pour $\alpha = 0$, on a :

$$F'''(0) = \frac{d^2[\frac{dF(\psi x)}{dx}\cdot\overline{f(\psi x)}^3]}{dx^2} = \frac{d^2[F'(\psi x)\cdot\overline{f(\psi x)}^3]}{dx^2}.$$

On a donc généralement :

$$F^{(n)}(0) = \frac{d^{n-1}[F'(\psi x)\cdot\overline{f(\psi x)}^n]}{dx^{n-1}}.$$

En substituant les valeurs trouvées pour $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, etc., dans la formule (k, on obtiendra la formule cherchée (a).

Coroll. Si l'on pose dans (a) $fz = 1$, on obtient :

$$F\left\{\psi(x+\alpha)\right\} = F(\psi x) + \alpha F'(\psi x) + \frac{\alpha^2}{1.2}F''(\psi x) + \text{etc.},$$

formule plus générale que celle de Taylor, car celle-ci ne donne que le développement de $\psi(x+\alpha)$.

THÉORÈME PARTICULIER DE LAPLACE.

Soit z *une fonction implicite de* α, *donnée par la relation*

$$z = \psi(x + \alpha f z),$$

je dis que l'on aura :

$$(b). \quad z = \psi x + \psi' x \cdot f(\psi x).\alpha + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} \cdot \frac{d[\psi' x \cdot \overline{f(\psi x)}^2]}{dx} + \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3} \frac{d^2[\psi' x \cdot \overline{f(\psi x)}^3]}{dx^2} + \text{etc.}$$

Démonst. Si, dans la formule (a), on pose $Fz = z$, on aura

$$F'z = \frac{dz}{dx}, \quad F'(\psi x) = \frac{d\psi x}{dx} = \psi' x,$$

et par conséquent la formule (a) deviendra la formule (b).

Coroll. Soit $fz = 1$, (b) devient

$$z = \psi(x + \alpha) = \psi x + \alpha\psi' x + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\psi'' x + \text{etc.},$$

ce qui est la formule de Taylor.

THÉORÈME GÉNÉRAL DE LAGRANGE.

Soit z *une fonction implicite de* α, *donnée par l'équation*

$$z = x + \alpha f z,$$

je dis que l'on aura :

$$(c). \quad Fz = Fx + \alpha F' x \cdot fx + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} \frac{d[F' x \cdot \overline{fx}^2]}{dx} + \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3} \frac{d^2[F' x \cdot \overline{fx}^3]}{dx^2} + \text{etc.}$$

Démonst. Dans la formule (a), on a pris z dans la relation

$$z = \psi(x + \alpha f z),$$

et dans la formule de Lagrange, on doit prendre z dans l'équation

$$z = x + \alpha f z,$$

on aura donc la formule de Lagrange, si dans la formule (b) on remplace ψx par x ou ψ par F.

THÉORÈME PARTICULIER DE LAGRANGE.

Soit z *une fonction implicite de* α, *donnée par la relation*

$$z = x + \alpha fz,$$

je dis que l'on aura :

$$(d). \quad z = x + \alpha fx + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d(\overline{fx^2})}{dx} + \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{d^2(\overline{fx^3})}{dx^2} + \text{etc.}$$

Démonst. Si l'on fait $Fz = z$, on aura

$$F'z = \frac{dz}{dx}, \quad F'x = \frac{dx}{dx} = 1, \quad Fx = x.$$

Donc, pour obtenir la formule (d), il suffira de faire dans (c), $F'x = 1$, $Fx = x$.

APPLICATIONS DES FORMULES PRÉCÉDENTES.

1^er^ *Exemple.* (Par la form. (a)).

On donne $z = \log(x + \alpha \sin z)$, *trouver le développement de* e^s, *suivant les puissances de* α.

Solut. On a ici :

$$\psi x = \log x, \quad F(\psi x) = e^{\log x} = x, \quad \frac{dF(\psi x)}{dx} = F'(x) = 1,$$

$fz = \sin z$, donc $f(\psi x) = \sin(\log x)$; on a donc par la formule (a) :

$$e^s = x + \alpha \sin\log x + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d(\overline{\sin\log x^2})}{dx} + \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2(\overline{\sin\log x^3})}{dx^2} + \text{etc.}$$

2^me^ *Exemp.* Soit $z = x + \alpha \sin z$,
trouver le développement z selon les puissances de α.

Solut. On a ici $fz = \sin z$, donc $fx = \sin x$, donc la formule (*d*) donnera :

$$z = x + \alpha \sin x + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d(\sin^2 x)}{dx} + \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2(\sin^3 x)}{dx^2} + \text{etc.}$$

Rem. Si l'on remplace x par nt, α par e, la formule précédente

donne le développement de

$$z = nt + e \sin z ,$$

suivant les puissances de e.

3^me^ *Exemp.* Soit $z = x + \alpha z$, on aura $fz = z$, donc $fx = x$, donc la formule (d) donnera :

$$z = x + \alpha x + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2(x^3)}{dx^2} + \text{etc.}$$

Rem. Soit $x = a(1 - e^2)$, $\alpha = -e \cos v$, $z = r$, la formule précédente donnera le développement de $r = a(1 - e^2) - e \cos v \cdot r$, ou de $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$.

4^me^ *Exemp.* On donne l'équation

$$ay + by^2 + cy^3 + \text{etc.} = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{etc.},$$

trouver la valeur de y, développée suivant les puissances de x.

Solut. Écrivons la relation proposée sous la forme

$$y = \frac{1}{a}(\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{etc.}) - \frac{1}{a}(by^2 + cy^3 + \text{etc.}),$$

et comparons-la à la relation

$$z = x + \alpha f(z) ;$$

l'on verra que le x de la 2^me^ formule est dans la 1^re^ le terme

$$\frac{1}{a}(\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{etc.}),$$

on aura de plus $z = y$, $f(z) = f(y) = by^2 + cy^3 + \text{etc.}$,

$$\alpha = -\frac{1}{a}.$$

On a donc, par la formule (c) :

$$y = \frac{1}{a}(\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{etc.}) - \frac{1}{a}\left[\frac{b}{a^2}(\alpha x + \beta x^2 + \text{etc.})^2 + \frac{c}{a^3}(\alpha x + \beta x^2 + \text{etc.})^3\right] + \frac{2}{a^3}\left[\frac{b^2}{a^4}(\alpha x + \beta x^2 + \text{etc.})^3 (\alpha + 2\beta x + \text{etc.}) + \text{etc.}\right] - \text{etc.},$$

ou, en ordonnant suivant les puissances de x :

$$y = \frac{\alpha}{a} x + \left(\frac{\beta}{a} - \frac{\alpha^2 b}{a^3}\right) x^2 + \text{etc.}$$

Si l'on fait $\beta = \gamma = \text{etc.} = 0$, l'équation proposée devient :

$$ax = ay + by^2 + cy^5 + \text{etc.},$$

et l'on trouvera réciproquement

$$y = \frac{a}{a}x - \frac{a^2 b}{a^5}x^2 + \frac{2a^5 b^2 - a^5 ac}{a^5}x^5 - \text{etc.}$$

Rem. La formule du 4^me^ exemple constitue ce qu'on nomme le *retour des suites*.

FORMULES D'EULER ET DE PAOLI.

—

Formule généralisée d'Euler.

Soit α une valeur approchée de l'une des racines a de l'équation $\varphi x = 0$; soit ψx une fonction telle que l'on ait $\psi\alpha = 0$; on pourra poser :

$$\varphi x = \psi x - y\,\mathrm{f}x = 0,\ y = \frac{\psi x}{\mathrm{f}x} = \xi x. \qquad (1)$$

Il est clair que l'on aura $y = 0$, quand on fera $x = \alpha$, et que x, et par conséquent $\mathrm{F}x$ (F désignant une fonction quelconque donnée), sera une fonction de y, telle que χy. On a donc, par le théorème de Maclaurin :

$$\mathrm{F}x = \chi(y) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 y + \mathrm{A}_2 y^2 + \mathrm{A}_3 y^3 + \text{etc.} \qquad (2)$$

Pour $x = \alpha$, on a $y = 0$, donc $\mathrm{A}_0 = \mathrm{F}x$.

L'équation (1) donne par la différentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi' x \cdot \mathrm{f}x - \mathrm{f}'x \cdot \psi x}{(\mathrm{f}x)^2},\ \text{donc}\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\alpha} = \frac{\psi'\alpha}{\mathrm{f}\alpha};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi'' x \cdot (\mathrm{f}x)^2 - 2\mathrm{f}'x \cdot \mathrm{f}x \cdot \psi' x + \psi x\,[2(\mathrm{f}'x)^2 - \mathrm{f}x \cdot \mathrm{f}''x]}{(\mathrm{f}x)^3},$$

$$\text{donc}\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\alpha} = \frac{\psi''\alpha}{\mathrm{f}\alpha} - \frac{2\psi'\alpha \cdot \mathrm{f}'\alpha}{(\mathrm{f}\alpha)^2};$$

on trouvera, par une nouvelle différentiation :

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=\alpha} = \frac{\psi''\alpha \cdot (\mathrm{f}\alpha)^2 - 3\mathrm{f}\alpha \cdot \mathrm{f}'\alpha \cdot \psi''\alpha - 3\mathrm{f}\alpha \cdot \mathrm{f}''\alpha \cdot \psi'\alpha + 6(\mathrm{f}'\alpha)^2}{(\mathrm{f}\alpha)^3};$$

Différentions l'équation (2) plusieurs fois de suite, nous trouverons :

$$F'x = A_1 \frac{dy}{dx} + 2A_2 y \frac{dy}{dx} + 3A_3 y^2 \frac{dy}{dx} + \text{etc.}$$

$$F''x = A_1 \frac{d^2y}{dx^2} + 2A_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2A_2 y \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \cdot 3A_3 y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3A_3 y^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$F'''x = A_1 \frac{d^3y}{dx^3} + 6A_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2A_2 y \frac{d^3y}{dx^3} + 2 \cdot 3A_3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2 \cdot 2 \cdot 3A_3 y \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 3A_3 y^2 \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc., etc.}$$

Fesons, dans ces équations $x = \alpha$, donc $y = 0$, nous obtiendrons :

$$F'\alpha = A_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\alpha},$$

$$F''\alpha = A_1 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\alpha} + 2A_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=\alpha},$$

$$F'''x = A_1 \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=\alpha} + 6A_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\alpha} \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\alpha} + 2 \cdot 3A_3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3_{x=\alpha}, \text{ etc.}$$

De ces équations on tire :

$$A_1 = \frac{F'\alpha}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\alpha}},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{F''\alpha - A_1\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\alpha}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=\alpha}}\right\},$$

$$A_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}\left\{\frac{F'''\alpha - A_1\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=\alpha} - 6A_2\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\alpha} \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\alpha}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3_{x=\alpha}}\right\};$$

etc.

Si nous mettons dans ces expressions les valeurs ci-dessus des dérivées

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\alpha},\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\alpha},\ \text{etc.},$$

nous aurons

$$A_1 = \frac{F'\alpha \cdot f\alpha}{\psi'\alpha},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{F''\alpha\cdot(f\alpha)^2}{(\psi'\alpha)^2} - \frac{F'\alpha[\psi''\alpha\cdot(f\alpha)^2 - 2\psi'\alpha\cdot f\alpha\cdot f'\alpha]}{(\psi'\alpha)^3}\right\},$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{F'\alpha\cdot(f\alpha)^2}{\psi'\alpha}\right],$$

$$A_3 = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\overline{f\alpha}^3\cdot F'\alpha}{\psi'\alpha}\right)\right],\ \text{etc.}$$

On a donc, enfin :

$$Fx = F\alpha + \frac{1}{\psi'\alpha}(F'\alpha\cdot f\alpha)\cdot y + \frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{F'\alpha\cdot(f\alpha)^2}{\psi'\alpha}\right]\frac{y^2}{2} +$$
$$\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{F'\alpha\cdot\overline{f\alpha}^3}{\psi'\alpha}\right)\right]\cdot\frac{y^3}{2\cdot 3} + \text{etc.} \quad (A)$$

C'est la formule d'Euler généralisée.

FORMULES PARTICULIÈRES D'EULER.

1° Si dans la formule (A) nous faisons $Fx = x$ ou $F = 1$, nous en déduirons d'abord la suivante :

$$x = \alpha + \frac{1}{\psi'\alpha}\cdot(fx)\cdot y + \frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\overline{f\alpha}^2}{\psi'\alpha}\right)\cdot\frac{y^2}{2} +$$
$$\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\overline{f\alpha}^3}{\psi'\alpha}\right)\right]\cdot\frac{y^3}{2\cdot 3} + \text{etc.} \quad (a)$$

2° Posons dans (A) $fx = 1$, il vient :

$$Fx = F\alpha + \frac{1}{\psi'\alpha}(F'\alpha)\cdot y + \frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{F'\alpha}{\psi'\alpha}\right)\cdot\frac{y^2}{2} +$$
$$\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{F'\alpha}{\psi'\alpha}\right)\right]\frac{y^3}{2\cdot 3} + \text{etc.} \quad (b)$$

3° Faisons dans cette dernière $Fx=x$ ou $F=1$, nous aurons la formule donnée par Euler :

$$x=\alpha+\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot y+\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\psi'\alpha}\right)\cdot\frac{y^2}{2}+$$
$$\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\psi'\alpha}\right)\right]\cdot\frac{y^3}{2.3}+\text{etc.}\qquad(c)$$

Coroll. 1. Posons $\psi x=x-\alpha$, donc $\psi' x=1$, donc $\psi'\alpha=1$, la formule (A) deviendra :

$$Fx=F\alpha+(F'\alpha\cdot f\alpha).y+\frac{d[F'\alpha.(f\alpha)^2]}{d\alpha}\cdot\frac{y^2}{1.2}+$$
$$\frac{d^2[F'\alpha.(f\alpha)^3]}{d\alpha^2}\cdot\frac{y^3}{1.2.3}+\text{etc.}\qquad(d)$$

Ce qui est la formule de Lagrange. Mais $\psi x=x-\alpha$, donne

$$\psi x-yfx=x-\alpha-yfx=0\quad\text{ou}\quad x=\alpha+yfx.$$

La formule précédente donne la valeur d'une fonction Fx, de la variable x, donnée par cette équation implicite. Si α est une valeur approchée de l'une des racines a de l'équation $\varphi x=x-\alpha-yfx=0$, l'équation (d) pour $Fx=x$ ou $F=1$, savoir :

$$x=\alpha+f\alpha.y+\frac{d(f\alpha)^2}{d\alpha}\cdot\frac{y^2}{1.2}+\frac{d^2(f\alpha)^3}{d\alpha^2}\cdot\frac{y^3}{1.2.3}+\text{etc.},\qquad(e)$$

donnera, quand elle est convergente, la racine a par une approximation plus ou moins grande.

Coroll. 2. Si dans la formule (A) nous posons $\psi x=x-\xi\alpha$, on aura $\psi' x=1$, donc $\psi'\alpha=1$, par conséquent cette formule deviendra :

$$Fx=F(\xi\alpha)+y.F'(\xi\alpha).f(\xi\alpha)+\frac{y^2}{1.2}\cdot\frac{d[F'(\xi\alpha)\cdot f(\xi\alpha)^2]}{d\alpha}+$$
$$\frac{y^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^2[F'(\xi\alpha)\cdot f(\xi\alpha)^3]}{d\alpha}+\text{etc.}\qquad(f)$$

Ce qui est la formule de Laplace, pour le développement d'une fonction Fx, quand x est donné par l'équation implicite

$$\varphi x=x-\xi\alpha-yfx=0,$$

ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$x=\xi\alpha+yfx;$$

ou par une équation de la forme

$$x = \xi(\alpha + y\,\mathrm{f}x).$$

Donc si $\xi\alpha$ est une valeur approchée de l'une des racines a de l'équation

$$_{\varphi}x = x - \xi(\alpha + y\,\mathrm{f}x) = 0,$$

et que la formule qu'on déduit de (f) pour $\mathrm{F}x = x$, savoir :

$$x = \xi\alpha + y.\mathrm{f}(\xi\alpha) + \frac{y^2}{1.2}\cdot\frac{d(\mathrm{f}(\xi\alpha)^2)}{d\alpha} + \frac{y^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^2(\mathrm{f}(\xi\alpha)^3)}{d\alpha^2} + \text{etc.} \quad (g),$$

est convergente, elle donnera la racine a avec une approximation plus ou moins grande.

FORMULE GÉNÉRALISÉE DE PAOLI.

Si, dans la formule (A), nous posons $\frac{1}{\psi\alpha} = \mathrm{A}$, nous aurons :

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F}\alpha + \mathrm{A}(\mathrm{F}'\alpha.\mathrm{f}\alpha)y + \frac{\mathrm{A}.d(\mathrm{A}.\mathrm{F}'\alpha.\mathrm{f}\alpha^2)}{d\alpha}\cdot\frac{y^2}{1.2} + \frac{\mathrm{A}d(\mathrm{A}d(\mathrm{A}.\mathrm{F}'\alpha.\mathrm{f}\alpha^3))}{d\alpha^2}\cdot\frac{y^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

C'est la formule de Paoli généralisée.

FORMULES PARTICULIÈRES DE PAOLI.

En faisant dans les formules (b) et (c), comme ci-dessus : $\frac{1}{\psi'\alpha} = \mathrm{A}$, on aura :

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F}\alpha + \mathrm{A}.\mathrm{F}'\alpha.y + \frac{\mathrm{A}d(\mathrm{A}.\mathrm{F}'\alpha)}{d\alpha}\cdot\frac{y^2}{1.2} + \frac{\mathrm{A}d(\mathrm{A}d(\mathrm{A}.\mathrm{F}'\alpha))}{d\alpha^2}\cdot\frac{y^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$x = \alpha + \mathrm{A}y + \mathrm{A}.\frac{d\mathrm{A}}{d\alpha}\cdot\frac{y^2}{1.2} + \frac{\mathrm{A}d(\mathrm{A}d\mathrm{A})}{d\alpha^2}\cdot\frac{y^3}{1.2.3} + \text{etc.};$$

ce sont les formules particulières de Paoli, données par cet auteur.

§ 21.

CLASSIFICATION

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Lorsque dans un système d'équations différentielles il n'entre qu'une seule variable indépendante, on les nomme *équations différentielles totales*. Lorsque le même système renferme plus d'une variable indépendante, les équations qui en font partie, se nomment des *équations aux différentielles partielles*.

Lorsque le système se réduit à une seule équation, on a le cas le plus simple de la classe des équations simultanées.

Les équations qui font partie d'un système peuvent être en général du n^e ordre et du p^e degré. Quand $p=1$, on dit que l'équation est linéaire. Une équation est du n^e ordre, lorsque l'ordre du coëfficient différentiel le plus élevé qui y entre est n; elle est du p^e degré lorsque l'exposant le plus élevé des coëfficients différentiels d'une équation est p, ou lorsqu'elle ne contient, dans un même terme, pas plus de p facteurs-dérivées.

Les équations différentielles les plus simples sont celles du 1er ordre et du 1er degré à une seule variable dépendante.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS ET TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

§ 22.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES EXACTES DU 1er ORDRE ET DU 1er DEGRÉ.

Une équation différentielle est exacte lorsqu'elle provient de la différentiation immédiate d'une équation primitive.

Soit $u = f(x, y) = 0$, une équation primitive, sa différentielle immédiate sera :

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = 0.$$

Donc, si l'on donne une équation différentielle de la forme

$$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

P et Q étant des fonctions de x et de y, elle sera exacte, lorsque l'on aura

$$P = \left(\frac{du}{dx}\right), \quad Q = \left(\frac{du}{dy}\right),$$

$u = f(x,y) = 0$, désignant l'équation primitive.

33^{me} Théor. *Soit* $P\,dx + Q\,dy = 0$, *une équation différentielle du* 1er *ordre et du* 1er *degré entre deux variables* x, y, P *et* Q *désignant des fonctions quelconques de ces variables, je dis qu'elle sera exacte quand on aura :*

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Démonst. Pour que la proposée soit exacte, $u = f(x,y) = 0$, désignant la fonction primitive, on doit avoir

$$P = \left(\frac{du}{dx}\right), \quad Q = \left(\frac{du}{dy}\right).$$

De ces équations on tire, par la différentiation :

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right), \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dydx}\right);$$

d'où :
$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dydx}\right).$$

1er *Exemp.* Soit l'équation

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)dx + (\beta x + \delta y + \varepsilon)dy = 0;$$

on a $P = \alpha x + \beta y + \gamma$, $Q = \beta x + \delta y + \varepsilon$.

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \beta, \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \beta, \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right);$$

donc la proposée est une différentielle exacte.

2^{me} *Exemp.* $(x^2 + y^2 - a^2)dy + (a^2 + 2xy + x^2)dx = 0$,

donne $\left(\frac{dP}{dy}\right)=2x$, $\left(\frac{dQ}{dx}\right)=2x$;

donc la proposée est exacte.

3^me *Exemp.* Soit $\frac{dy}{y}=\frac{xdy-ydx}{y\sqrt{x^2+y^2}}$,

on peut mettre cette équation sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0.$$

On a ici :

$$P=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad Q=\frac{1}{y}-\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Donc $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\frac{-y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$, $\left(\frac{dQ}{dx}\right)=\frac{-y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$;

ainsi la proposée est une différentielle exacte.

34^me Théor. *Soit* $Pdx+Qdy+Rdz=0$, P,Q,R, *étant des fonctions de* x,y,z, *je dis que la proposée sera exacte, quand on aura :*

$$P\left\{\left(\frac{dQ}{dz}\right)-\left(\frac{dR}{dy}\right)\right\}+Q\left\{\left(\frac{dR}{dx}\right)-\left(\frac{dP}{dz}\right)\right\}+R\left\{\left(\frac{dP}{dy}\right)-\left(\frac{dQ}{dx}\right)\right\}=0.$$

Démonst. Soit $z=f(x,y)$ l'équation primitive, on aura, pour sa différentielle immédiate :

$$dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy.$$

Mais de la proposée on tire :

$$dz=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy.$$

Donc, celle-ci sera exacte, quand on aura :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{P}{R}=P',\quad \left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{Q}{R}=Q'.$$

Différentions la 1^re par rapport à y, et la 2^de par rapport à x, et

observons que P', Q', sont des fonctions de x, y, z, tandis que z est fonction de x, y, on aura :

$$(\frac{d^2z}{dxdy})=(\frac{dP'}{dy})+(\frac{dP'}{dz})(\frac{dz}{dy}),\ (\frac{d^2z}{dydx})=(\frac{dQ'}{dx})+(\frac{dQ'}{dz})(\frac{dz}{dx}).$$

Or, comme on a $(\frac{d^2z}{dxdy})=(\frac{d^2z}{dydx})$, il vient :

$$(\frac{dP'}{dy})+(\frac{dP'}{dz})\cdot Q'=(\frac{dQ'}{dx})+(\frac{dQ'}{dz})\cdot P'. \qquad (\alpha)$$

Mais, à cause de $P'=-\frac{P}{R}$, $Q'=-\frac{Q}{R}$, on a :

$$(\frac{dP'}{dy})=-\frac{R(\frac{dP}{dy})-P(\frac{dR}{dy})}{R^2},\ (\frac{dP'}{dz})=-\frac{R(\frac{dP}{dz})-P(\frac{dR}{dz})}{R^2},$$

$$(\frac{dQ'}{dx})=-\frac{R(\frac{dQ}{dx})-Q(\frac{dR}{dx})}{R^2},\ (\frac{dQ'}{dz})=-\frac{R(\frac{dQ}{dz})-Q(\frac{dR}{dz})}{R^2}.$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (α), et en transportant tous les termes dans un même membre, le résultat sera la formule énoncée dans le théorème.

Exemp. Soit l'équation

$$2(y+z)dx+(x+3y+2z)dy+(x+y)dz=0;$$

on aura :

$$P=2(y+z),\ Q=x+3y+2z,\ R=x+y;$$

d'où :

$$(\frac{dQ}{dz})-(\frac{dR}{dy})=1,\quad \text{et}\quad P\left\{(\frac{dQ}{dz})-(\frac{dR}{dy})\right\}=2(y+z),$$

$$(\frac{dR}{dx})-(\frac{dP}{dz})=-1,\ \text{et}\ Q\left\{(\frac{dR}{dx})-(\frac{dP}{dz})\right\}=-x-3y-2z,$$

$$(\frac{dP}{dy})-(\frac{dQ}{dx})=1,\ \text{et}\ R\left\{(\frac{dP}{dy})-(\frac{dQ}{dx})\right\}=x+y.$$

Or, la somme de ces trois produits étant nulle, l'on voit que la proposée est une équation différentielle exacte.

Rem. Si l'équation différentielle contient plus de trois variables, on obtient plusieurs équations de condition comme caractère de

l'exactitude de l'équation différentielle proposée. Soit, par exemple, l'équation aux quatre variables.

$$Pdx + Qdy + Rdz + Vdu = 0, \quad \text{ou}$$

$$du = -\frac{P}{V}dx - \frac{Q}{V}dy - \frac{R}{V}dz$$

$$= P'dx + Q'dy + R'dz$$

$$= \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)dz;$$

on aura :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = P' \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = Q', \quad \left(\frac{du}{dz}\right) = R'.$$

Donc

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) = \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{dP'}{du}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{dP'}{du}\right)\cdot Q',$$

$$\left(\frac{d^2u}{dydx}\right) = \left(\frac{dQ'}{dx}\right) + \left(\frac{dQ'}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{dQ'}{dx}\right) + \left(\frac{dQ'}{du}\right)\cdot P',$$

ce qui fournit une première équation de condition, savoir :

$$\left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{dP'}{du}\right)Q' = \left(\frac{dQ'}{dx}\right) + \left(\frac{dQ'}{du}\right)P'.$$

Mais on a aussi :

$$\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right) = \left(\frac{dP'}{dz}\right) + \left(\frac{dP'}{du}\right)\left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dP'}{dz}\right) + \left(\frac{dP'}{du}\right)R',$$

$$\left(\frac{d^2u}{dzdx}\right) = \left(\frac{dR'}{dx}\right) + \left(\frac{dR'}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{dR'}{dx}\right) + \left(\frac{dR'}{du}\right)\cdot P';$$

Ce qui conduit à une seconde équation de condition, savoir :

$$\left(\frac{dP'}{dz}\right) + \left(\frac{dP'}{du}\right)R' = \left(\frac{dR'}{dx}\right) + \left(\frac{dR'}{du}\right)P'.$$

Ensuite on a :

$$\left(\frac{d^2u}{dydz}\right) = \left(\frac{dQ'}{dz}\right) + \left(\frac{dQ'}{du}\right)\left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dQ'}{dz}\right) + \left(\frac{dQ'}{du}\right)\cdot R',$$

$$\left(\frac{d^2u}{dzdy}\right) = \left(\frac{dR'}{dy}\right) + \left(\frac{dR'}{du}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dR'}{dy}\right) + \left(\frac{dR'}{du}\right)Q',$$

d'où l'on conclut

$$\left(\frac{dQ'}{dz}\right) + \left(\frac{dQ'}{du}\right)R' = \left(\frac{dR'}{dy}\right) + \left(\frac{dR'}{du}\right)Q'.$$

§ 23.

RECHERCHE DU FACTEUR PROPRE A RENDRE LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES EXACTES.

35^me^ THÉOR. *Toute équation de la forme* $Pdx+Qdy=0$, *non exacte, peut être rendue exacte par la multiplication d'un facteur* z, *fonction de* x *et de* y.

Démonst. Soit $u=f(x,y)=c$ l'équation primitive, on aura :

$$du=(\frac{du}{dx})dx+(\frac{du}{dy})dy=0,$$

pour sa différentielle exacte, que l'on peut mettre sous la forme

$$M\,dx+N\,dy=0.$$

De celle-ci, et de la proposée, on déduit

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N},\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{P}{Q};$$

d'où :

$$\frac{P}{Q}=\frac{M}{N},\quad \text{et}\quad M=Pz,\ N=Qz.$$

Par conséquent l'équation

$$du=Pz\,dx+Qz\,dy=z(P\,dx+Q\,dy)=0,$$

sera une équation différentielle exacte.

1^re^ *Rem.* Le facteur z ne peut pas être déterminé généralement, car il dépend de l'intégration, par rapport à z, de l'équation

$$(\frac{d\,Pz}{dy})=(\frac{d\,Qz}{dx}),$$

ou

$$z(\frac{dP}{dy})+P(\frac{dz}{dy})=z(\frac{dQ}{dx})+Q(\frac{dz}{dx}),$$

plus difficile à obtenir que celle de la proposée.

2^me^ *Rem.* On prouvera de même qu'il existe un facteur μ, fonction de x, de y et de z, propre à rendre une différentielle exacte, l'équation $Pdx+Qdy+Rdz=0$, supposée inexacte.

Car si $Mdx+Ndy+Vdz=0$, est la même équation rendue exacte, on aura les deux valeurs

$$\frac{dz}{x}=-\frac{M+N\frac{dy}{dx}}{V},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{P+Q\frac{dy}{dx}}{R};$$

d'où : $\dfrac{P+Q\dfrac{dy}{dx}}{R}=\dfrac{M+N\dfrac{dy}{dx}}{V}$; par conséquent :

$$M+N\frac{dy}{dx}=\mu P+\mu Q\frac{dy}{dx},$$

$$V\frac{dz}{dx}=\mu R\frac{dz}{dx}.$$

En ajoutant ces équations, il vient :

$$M+N\frac{dy}{dx}+V\frac{dz}{dx}=\mu\left\{P+Q\frac{dy}{dx}+R\frac{dz}{dx}\right\},\quad\text{et par suite}$$

$$M\,dx+N\,dy+V\,dz=\mu(P\,dx+Q\,dy+R\,dz).$$

36^{me} Théor. *Lorsqu'on connaît un seul facteur* z, *propre à rendre l'équation* $P\,dx+Q\,dy=0$, *exacte, on peut en déduire une infinité d'autres.*

Démonst. Soit z le facteur propre à rendre la proposée une différentielle exacte $du=z(P\,dx+Q\,dy)=0$, l'équation primitive sera de la forme $u=c$, et l'on aura, en désignant par φu, une fonction quelconque de u :

$$\varphi u\,du=z\,\varphi u\,(P\,dx+Q\,dy)=0.$$

Le 1er membre étant une différentielle exacte, le 2^{d} membre sera aussi une différentielle exacte. Donc, si z est un facteur, il y en aura une infinité d'autres, compris sous la forme $z\cdot\varphi u$; le plus simple de ceux-ci est $z\cdot u$.

1er *Exemp.* $ay\,dx+bx\,dy=0$, devient exacte pour $x=\dfrac{1}{xy}$, car alors on a :

$$du=\frac{1}{xy}\left\{ay\,dx+bx\,dy\right\}=\frac{a\,dx}{x}+\frac{b\,dy}{y}=d\cdot lx^{a}+d\,ly^{b}=$$

$$d\,l(x^{a}y^{b})=0\quad u=x^{a}y^{b}.$$

Donc l'équation proposée devient encore une différentielle exacte à l'aide du facteur

$$z\cdot u=\frac{1}{xy}\cdot x^{a}y^{b}=x^{a-1}y^{b-1}.$$

2^{me} *Exemp.* P étant une fonction de x seul, l'équation

$$P\,y\,dx+dy=0$$

devient une différentielle exacte, à l'aide du facteur $z = \frac{1}{y}$; car on a alors

$$du = \frac{1}{y}(Pydx + dy) = Pdx + \frac{dy}{y} = d(\log . y . e^{\int P dx}) = 0.$$

Donc $u = \log(y . e^{\int P dx})$, et l'on peut prendre $\varphi u = y . e^{\int P dx}$. Donc $\varphi u . z = y e^{\int P dx} . \frac{1}{y} = e^{\int P dx}$, sera aussi un facteur qui rendra la proposée exacte, et l'équation

$$e^{\int P dx}\left\{ Pydx + dy \right\} = 0,$$

sera une différentielle exacte.

3^me^ *Exemp.* Soit l'équation $dy + Pydx = Qdx$, P et Q étant des fonctions de x seul, je dis qu'en la multipliant par le facteur

$$z = e^{\int P dx},$$

elle deviendra une différentielle exacte. En effet, $e^{\int P dx}(dy + Pydx)$, est une différentielle exacte, en vertu de l'exemple précédent, aussi bien que $Qe^{\int P dx} dx$, qui est de la forme $F'xdx = dFx$.

4^me^ *Exemp.* $adx + bdy$, devient une différentielle exacte par le facteur $x^a y^b$, donc aussi par $x^{\mu a} y^{\mu b}$.

De même $x^m y^n (cydx + gxdy)$, deviendra une différentielle exacte par le facteur

$$z = \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}},$$

donc par $x^\varepsilon y^\varepsilon$, donc aussi par $x^{\nu\varepsilon} y^{\nu\varepsilon}$. Il suit de là, que l'équation

$$aydx + bxdy = x^m y^n (cydx + gxdy),$$

dont le premier membre devient exacte par le facteur

$$\frac{1}{xy} . x^{\mu a} y^{\mu b} = x^{\mu a - 1} y^{\mu b - 1}, \qquad (\alpha$$

et le second membre, par le facteur

$$\frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}} . x^{\nu c} y^{\nu g} = x^{\nu c - m - 1} y^{\nu g - n - 1}, \qquad (\beta$$

deviendra exacte, en multipliant le premier membre par le facteur (α et le second par le facteur (β, pourvu que l'on identifie les

exposants de ces facteurs, ou que l'on pose

$$\mu a = vc - m,$$
$$\mu b = vg - n;$$

d'où $$\mu = \frac{cn - gm}{ag - bc}, \quad v = \frac{an - bm}{ag - bc}.$$

37^me^ Théor. *L'équation* $P\,dx + Q\,dy = 0$, *étant supposée homogène par rapport à* x *et à* y, *je dis qu'elle sera rendue exacte, en la multipliant par le facteur*

$$z = \frac{1}{P.x + Q.y}.$$

Démonst. z étant le facteur de la proposée, on aura la différentielle exacte

$$du = Pz\,dx + Qz\,dy = 0 = \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy.$$

Soit a le nombre des dimensions de cette équation, alors l'équation primitive $u = f(x, y) = c$,
sera de $a+1$ dimensions.

On a donc, par le théorème des fonctions homogènes :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)x + \left(\frac{du}{dy}\right)y = (a+1)u = (a+1)c = k.$$

Mais on a :

$$Pz = \left(\frac{du}{dx}\right), \quad Qz = \left(\frac{du}{dy}\right);$$

donc, l'équation précédente devient :

$$Pz.x + Qz.y = k, \quad \text{ou}$$
$$z = \frac{k}{Px + Qy}.$$

Or $$du = (Q\,dx + P\,dy)\cdot z = 0;$$

donc $$du = (P\,dx + Q\,dy)\left(\frac{k}{Px + Qy}\right) = 0,$$

ou $$du = (P\,dx + Q\,dy)\cdot\frac{1}{Px + Qy} = 0;$$

donc, le facteur cherché est

$$z = \frac{1}{Px + Qy}.$$

Exemp. Le facteur de $x\,dx + y\,dy = 0$, est $z = \frac{1}{x^2+y^2}$;

celui de $x^5y\,dx + y^4dy = 0$, est $z = \frac{1}{x^4y+y^5}$;

celui de $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$, est $z = \frac{1}{x^2+y^2}$.

etc.

§ 24.

DE LA SÉPARATION DES VARIABLES DANS LES ÉQUATIONS DE DEUX VARIABLES DU 1^er^ ORDRE ET DU 1^er^ DEGRÉ.

Une équation $P\,dx + Q\,dy = 0$, dans laquelle P et Q sont des fonctions de x et de y est *séparée*, lorsqu'elle est mise sous la forme

$$X\,dx + Y\,dy = 0,$$

X ne contenant que la seule variable x, et Y la seule variable y. La séparation des variables n'est pas toujours possible; nous allons donner les cas où elle est toujours praticable.

1^er^ PROBL. *Séparer les variables quand l'équation a la forme*

$$\mathrm{f}x \cdot \varphi y\,\mathrm{d}x = \psi y \cdot \chi x \cdot \mathrm{d}y.$$

Solut. Il suffira de diviser les deux membres par le produit $\varphi y \cdot \chi x$, car alors on a :

$$\frac{\mathrm{f}x \cdot \varphi y}{\varphi y \cdot \chi x} \cdot dx = \frac{\psi y \cdot \chi x}{\varphi y \cdot \chi x}\,dy,$$

ou

$$\frac{\mathrm{f}x}{\chi x}\,dx = \frac{\psi y}{\varphi y}\,dy.$$

Exemp. $(y - \varphi y)dx = x\,dy$, donne

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y - \varphi y}.$$

2^me^ PROBL. *L'équation étant de la forme*

$$\mathrm{f}(x,y)\mathrm{d}x + \varphi(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

et homogène par rapport à x *et* y, *séparer les variables.*

Solut. Soit $y = xt$, donc $dy = x\,dt + t\,dx$,

on aura : $\mathrm{f}(x,y) = x^a \mathrm{f}(t)$,

a étant le dégré de l'homogénéité,

$$\varphi(x,y) = x^a \varphi(l);$$

l'équation proposée devient :

$$x^a f t dx + x^a \varphi t [x dt + t dx] = 0,$$

ou $$f t \cdot dx + x \varphi t \cdot dt + t \varphi t \cdot dx = 0,$$

ou $$(f t + t \varphi t) dx + x \varphi t \cdot dt = 0.$$

On a donc, par le 1^er^ problème :

$$\frac{dx}{x} = -\frac{\varphi t \cdot dt}{f t + t \varphi t}.$$

1^er^ *Exemp.* Séparer les variables dans l'équation homogène

$$x dx + y dy = 2y dx, \quad \text{ou}$$
$$(x - 2y) dx + y dy = 0.$$

On pose $y = xt$, $dy = x dt + t dx$;

alors la proposée devient :

$$(x - 2xt) dx + xt(x dt + t dx) = 0,$$
$$(1 - 2t) dx + xt dt + t^2 dx = 0,$$
$$(1 - 2t + t^2) dx + xt dt = 0,$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{t dt}{(1-t)^2} = 0.$$

2^me^ *Exemp.* Séparer les variables dans l'équation homogène

$$x dy - y dx = dx \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On pose $y = xt$, $dy = x dt + t dx$, alors la proposée devient :

$$x^2 dt + xt dx - xt dx = dx \sqrt{x^2 + x^2 t^2},$$
$$x dt = dx \sqrt{1 + t^2},$$
$$\frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Rem. On peut traiter, par le même procédé, l'équation

$$(ax + by + c) dx + (ex + fy + g) dy = 0,$$

qui devient homogène en posant

$$ax + by + c = u,$$
$$ex + fy + g = t.$$

3me PROBL. *Séparer l'équation linéaire*

$$dy + Py\,dx = Q\,dx,$$

P *et* Q *étant des fonctions de* x *seul.*

Solut. Soit $y = Xt$, X étant une fonction de x seul, donc

$$dy = X\,dt + t\,dX;$$

on aura, à la place de la proposée, la suivante :

$$X\,dt + t\,dX + PXt\,dx = Q\,dx,$$

ou

$$X\,dt + t(dX + PX\,dx) = Q\,dx.$$

On peut admettre que les indéterminés X et t, soient tels, que l'on ait $dX + PX\,dx = 0$, $X\,dt = Q\,dx$;

Alors on aura les deux équations séparées

$$\frac{dX}{X} = -P\,dx, \quad dt = \frac{Q\,dx}{X},$$

équivalente à la proposée.

1er *Exemp.* $dy + y \cdot \frac{x\,dx}{1-x^2} = \frac{a\,dx}{1-x^2}$, donne, pour $y = Xt$, $dy = X\,dt + t\,dX$, la suivante :

$$X\,dt + t\,dX + Xt \cdot \frac{x\,dx}{1-x^2} = \frac{a\,dx}{1-x^2}, \text{ ou}$$

$$X\,dt + t\left(dX + X\,\frac{x\,dx}{1-x^2}\right) = \frac{a\,dx}{1-x^2}; \quad \text{donc}$$

$$dX + X\,\frac{x\,dx}{1-x^2} = 0$$

$$X\,dt = \frac{a\,dx}{1-x^2},$$

ou

$$\frac{dX}{X} = \frac{-x\,dx}{1-x^2},$$

$$dt = \frac{a\,dx}{X(1-x^2)}.$$

2me *Exemp.* $dy + y\,dx = ax^6\,dx$, donne, pour $y = Xt$,

$$X\,dt + t(dX + X\,dx) = ax^6\,dx; \quad \text{d'où :}$$

$$dX + X\,dx = 0,$$

$$X\,dt = ax^6\,dx,$$

ou $$\frac{dX}{X} = -dx, \quad dt = \frac{ax^6 dx}{X}.$$

Rem. L'équation

$$dy + y^2 dx = a dx,$$

se sépare immédiatement, car on a

$$dy = (a - y^2)\,dx, \qquad \text{donc}$$

$$\frac{dy}{a - y^2} = dx.$$

Donc l'équation

$$dy + y^2 dx = ax^m dx,$$

qui se nomme l'équation de Riccati, est séparable quand $m = 0$. Mais ce cas n'est pas le seul où elle soit séparable; le théorème suivant renferme tous les cas où elle devint séparable, par des transformations convenables.

38^me^ Théor. *L'équation de Riccati*

$$dy + y^2 dx = ax^m dx, \qquad (1)$$

est séparable, quand m *est de la forme*

$$m = \frac{-4k}{2k \pm 1}.$$

1re transformation de l'équation (1).

Démonst. Soient $y = \frac{a}{(m+1)z}$, donc $dy = \frac{-a dz}{(m+1)z^2}$;

$$x^{m+1} = t, \text{ donc } x^m dx = \frac{dt}{m+1},$$

l'équation (*a*) devient

$$dz + z^2 dt = \frac{a}{(m+1)^2} t^{-\frac{m}{m+1}} dt; \qquad (a)$$

elle est de la même forme que la proposée.

Donc si la proposée est séparable pour $m = n$, la transformée (*a*) sera séparable pour

$$-\frac{m}{m+1} = n, \quad \text{ou pour} \quad m = -\frac{n}{n+1}.$$

2me TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION (1).

Soient $y = t - t^2 z$, donc $dy = dt - 2tz\,dt - t\,dz$;

$x = \frac{1}{t}$, donc $x^{m+1} = t^{-m-1}$, $x^m dx = -t^{-m-2} dt$,

$dx = -\frac{dt}{t^2}$,

la proposée devient :

$$dz + z^2 dt = at^{-m-4} dt. \qquad (b)$$

Elle est de la même forme que l'équation (1). Donc, si celle-ci est séparable pour $m = n$, l'équation (*b*) sera séparable pour $-m-4 = n$, ou pour $m = n - 4$.

Mais l'équation (1) est séparable pour $m = 0$,

donc, à cause de (*b*), pour $m = -4$;

donc, à cause de (*a*), pour $m = -\frac{4}{3}$,

donc, à cause de (*b*), pour $m = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}$,

donc, à cause de (*a*), pour $m = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{8}{3}+1} = -\frac{8}{5}$;

donc, à cause de (*b*), pour $m = \frac{8}{5} - 4 = -\frac{12}{5}$,

donc, à cause de (*a*), pour $m = \frac{\frac{12}{5}}{-\frac{12}{5}+1} = -\frac{12}{7}$,

donc, à cause de (*b*), pour $m = \frac{12}{7} - 4 = -\frac{16}{7}$,

etc., etc.

Or, si dans $m = \frac{-4k}{2k+1}$, on pose successivement $k = 1, 2, 3, \ldots$ on a : $m = -\frac{4}{3}, -\frac{8}{5}, -\frac{12}{7}, \ldots$

Si dans $m = \frac{-4k}{2k-1}$, on fait $k = 1, 2, 3, \ldots$ on a : $m = -4, -\frac{8}{3}, -\frac{12}{5}$, etc.

Donc, si m est de la forme $\frac{-4k}{2k+1}$, il faut, pour séparer l'équation (1), la transformer, en posant

$$y = \frac{a}{(m+1)z}, \quad x = t^{\frac{1}{m+1}} ;$$

Si m est de la forme $\frac{-4k}{2k-1}$, il faut, pour séparer l'équat. (1)

la transformer en posant

$$y = t - t^2 z, \quad x = \frac{1}{t}.$$

Exemp. Séparer les variables dans l'équation

$$dy + y^2 dx = a x^{-\frac{4}{3}} dx.$$

$m = -\frac{4}{3}$ est ici de la forme $\frac{-4k}{2k+1}$, donc, je poserai :

$y = \frac{a}{(-\frac{4}{3}+1)z}$, $x^{-\frac{4}{3}+1} = t$, la transformée sera :

$dz + z^2 dt = 9at^{-4} dt.$

$m = -4$ est de la forme $\frac{-4k}{2k-1}$, donc, je poserai :

$$z = v - v^2 u, \quad t = \frac{1}{v}, \quad \text{on aura :}$$

$$du + u^2 dv = 9a dv.$$

Celle-ci est séparable immédiatement, et se met sous la forme

$$\frac{du}{9a - u^2} = dv.$$

§ 25.

PROPRIÉTÉS ET TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS LINÉAIRES D'UN ORDRE QUELCONQUE.

39^me^ Théor. *L'équation linéaire*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + N y = 0. \qquad (1)$$

à coëfficients constants, se transforme en une équation algébrique.

$$a^n + A a^{n-1} + \ldots + N = 0,$$

en posant $y = e^{ax}$.

Démonst. Car on a $\frac{d^n y}{dx^n} = a^n e^{ax}$; donc

$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = a^{n-1} e^{ax}$, etc.; donc le 1^er^ membre de (1)

devient : $a^n e^{ax} + A a^{n-1} e^{ax} + \ldots + N e^{ax}$

ou $e^{ax}(a^n + A a^{n-1} + \ldots + N). \qquad (2)$

Donc, l'équation (1) sera satisfaite quand on aura :

$$a^n + Aa^{n-1} + \ldots + N = 0. \qquad (2)$$

Coroll. Soient $a = a_1, a_2, \ldots a_n$, les n racines de l'équation (2), on aura les n valeurs correspondantes

$$y_1 = e^{a_1 x}, \; y_2 = e^{a_2 x}, \; \ldots \; y_n = e^{a_n x},$$

qui satisferont à l'équation proposée (1).

40^me^ THÉOR. *Si les valeurs*

$$y = y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$$

satisfont à l'équation linéaire

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + \ldots + N\frac{d^n y}{dx^n} = 0, \qquad (a)$$

$A, B, \ldots N$, *étant constants, je dis que la somme*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \text{etc.} + C_n y_n, \qquad (b)$$

de ces valeurs, multipliées par des coëfficients constants, satisfera pareillement à cette équation.

Démonst. On a, par hypothèse :

$$\left.\begin{aligned} Ay_1 + B\frac{dy_1}{dx} + \ldots + N\frac{d^n y_1}{dx^n} &= 0, \\ Ay_2 + B\frac{dy_2}{dx} + \ldots + N\frac{d^n y_2}{dx^n} &= 0, \\ Ay_3 + B\frac{dy_3}{dx} + \ldots + N\frac{d^n y_3}{dx^n} &= 0, \\ \text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Mais de (*b*) on déduit par la différentiation :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= C_1\frac{dy_1}{dx} + C_2\frac{dy_2}{dx} + C_3\frac{dy_3}{dx} + \ldots \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= C_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2\frac{d^2y_2}{dx^2} + C_3\frac{d^2y_3}{dx^2} + \ldots \\ \frac{d^ny}{dx^n} &= C_1\frac{d^ny_1}{dx^n} + C_2\frac{d^ny_2}{dx^n} + C_3\frac{d^ny_3}{dx^n} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

En substituant ces valeurs dans le premier membre de l'équation (*a*), le résultat se réduira à zéro, à cause des relations (*c*), donc la somme (*b*), satisfait à l'équation (*a*).

41^me^ THÉOR. *Si* $y = y_1, y_2, \ldots y_n$ *satisfont à l'équation*

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + \ldots + N\frac{d^n y}{dx^n} = 0, \qquad (\alpha$$

je dis que la somme

$$y = E_1 y_1 + E_2 y_2 + \ldots + E_n y_n, \qquad (\beta$$

satisfera à l'équation

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + \ldots + N\frac{d^n y}{dx^n} = X, \qquad (\gamma$$

les coëfficients $E_1, E_2, \ldots$ *et* X, *étant des fonctions de* x *seul, et* $A, B, \ldots N$, *étant des facteurs constants.*

Démonst. En effet, (β donne, par la différentiation :

$$\frac{dy}{dx} = E_1\frac{dy_1}{dx} + E_2\frac{dy_2}{dx} + \ldots + y_1\frac{dE_1}{dx} + y_2\frac{dE_2}{dx} + \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = E_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + E_2\frac{d^2y_2}{dx^2} + \ldots + \frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dE_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\cdot\frac{dE_2}{dx} + \ldots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = E_1\frac{d^n y_1}{dx^n} + E_2\frac{d^n y_2}{dx^n} + \ldots + \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dE_1}{dx} + \frac{dy^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dE_2}{dx} + \ldots$$

Assujétissons les fonctions arbitraires $E_1, E_2, \ldots$ aux conditions

$$\left.\begin{aligned} y_1\frac{dE_1}{dx} + y_2\frac{dE_2}{dx} + \ldots &= 0, \\ \frac{dy_1}{dx}\frac{dE_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\cdot\frac{dE_2}{dx} + \ldots &= 0, \\ \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dE_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\cdot\frac{dE_2}{dx} + \ldots &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\delta$$

alors on aura :

$$\frac{dy}{dx} = E_1\frac{dy_1}{dx} + E_2\frac{dy_2}{dx} + \ldots$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = E_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + E_2\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \ldots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = E_1\frac{d^n y_1}{dx^n} + E_2\frac{d^n y_2}{dx^n} + \ldots + \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dE_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dE_2}{dx} + \ldots$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (γ), et que l'on fasse attention que l'on a par hypothèse :

$$Ay_1 + B\frac{dy_1}{dx} + \ldots + N\frac{dy^n{}_1}{dx^n} = 0,$$

$$Ay_2 + B\frac{dy_2}{dx} + \ldots + N\frac{d^n y_2}{dx^n} = 0,$$

etc.,

on trouvera pour résultat :

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dE_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dE_2}{dx} + \ldots = X. \qquad (\varepsilon$$

Si donc nous déterminons n des coëfficients

$$\frac{dE_1}{dx}, \frac{dE_2}{dx}, \ldots \frac{dE_n}{dx},$$

à l'aide des n équations (δ et (ε, on connaîtra les fonctions E, au nombre de n, dont la somme (β pourra se composer pour satisfaire à l'équation (γ.

§ 26.

ABAISSEMENT DE L'ORDRE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

42^me^ THÉOR. A, B, ... N, *étant des fonctions de* x *seul, je dis que l'équation*

$$A\frac{d^n y}{dx^n} + B\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + Ny = 0,$$

s'abaissera d'un ordre, par la substitution

$$y = e^{\int t dx}, \qquad (1$$

t *étant la nouvelle variable dépendante.*

Démonst. Prenons l'équation

$$A\frac{d^3y}{dx^3} + B\frac{d^2y}{dx^2} + C\frac{dy}{dx} + Dy = 0. \qquad (2$$

On déduira de la relation (1, les suivants :

$$\frac{dy}{dt} = te^{\int t dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int t dx}\left(t^2 + \frac{dt}{dx}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{\int t dx}\left(t^3 + 3t\frac{dt}{dx} + \frac{d^2t}{dx^2}\right);$$

donc (2 devient :

$$A\frac{d^2t}{dx^2} + (B + 3At)\frac{dt}{dx} + At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0;$$

cette équation n'est plus que du second ordre.

Rem. Si A, B, ... sont constants, on peut prendre t constant, et poser $y = e^{t\int dx} = e^{tx}$;

alors la proposée se réduit à

$$At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0,$$

à cause de $\frac{d^2t}{dx^2} = 0, \quad \frac{dt}{dx} = 0.$

43^me^ THÉOR. x *étant la variable indépendante, toute équation*

$$f(x, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}) = 0,$$

ne contenant pas y, *s'abaissera d'un ordre en posant*

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Démonst. Car on trouve

$$f(x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}) = 0.$$

Coroll. Si l'équation ne contient que y, et qu'elle soit par conséquent de la forme :

$$f(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}) = 0,$$

x étant la variable indépendante, on la changera en une autre de la forme $f(y, \frac{dx}{dy}, \ldots \frac{d^nx}{dy^n}) = 0,$

dans laquelle y soit la variable indépendante, puis on posera dans celle-ci $\frac{dx}{dy} = \varpi$, et l'on aura une équation

$$f(y, \varpi, \frac{d\varpi}{dy}, \ldots \frac{d^{n-1}\varpi}{dy^{n-1}}) = 0,$$

dont l'ordre a baissé d'une unité.

44me Théor. *Toute équation différentielle homogène par rapport à* x, y, dx, dy, d^2y, d^3y, *etc., s'abaissera d'un ordre au moins, en posant*

$$y=ux,\ \frac{dy}{dx}=p,\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{q}{x},\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2p}{dx^2}=\frac{r}{x^2},$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^3p}{dx^3}=\frac{s}{x^4},\ \text{etc.}$$

d^py *ne comptant que pour une, et* $(dy)^p$, $(dx)^p$ *pour* p *dimensions.*

Démonst. Soit l'équation homogène à cinq dimensions

$$x^4d^4y+x^3dy\,d^3y+x^2dy^2d^2y+y(dy)^4+x(dx)^4=0, \quad (1$$

ou $$x^4\frac{dy^4}{dx^4}+x^3\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+x=0. \quad (2$$

Comme $\frac{d^py}{dx^p}$ est de $1-p$ dimensions, il suit que les coëfficients des termes de l'équation (2, sont respectivement de

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0$$

dimensions; on peut donc poser :

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{s}{x^3},\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{r}{x^2},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{x},\ \frac{dy}{dx}=p;$$

si, de plus, on fait $y=ux$, l'équation (2 deviendra :

$$s+pr+p^2q+up^4+1=0. \quad (3$$

Cela posé,

1. A cause de $y=ux$, on a :

$$dy=pdx=udx+xdu,\ \text{d'où :}\ \frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}. \quad (4$$

2. A cause de $\frac{dp}{dx}=\frac{q}{x}$, on a $\frac{dp}{q}=\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$, d'où :

$$q=\frac{dp}{\frac{du}{p-u}}. \quad (5$$

3. A cause de $\frac{d^2p}{dx^2}=\frac{r}{x^2}$, on a $\frac{d^2p}{r}=\left(\frac{dx}{x}\right)^2=\left(\frac{du}{p-u}\right)^2$,

$$\text{d'où :}\quad r=\frac{d^2p}{\left(\frac{du}{p-u}\right)^2}. \quad (6$$

4. A cause de $\frac{d^3p}{dx^3}=\frac{s}{x^3}$, on a $\frac{d^3p}{s}=(\frac{dx}{x})^3=(\frac{du}{p-u})^3$,

$$\text{d'où :}\quad d^3p-s(\frac{du}{p-u})^3=0. \qquad (7$$

5. Substituons dans (3, les valeurs de q et de r, nous aurons :

$$s+p\frac{d^2p}{(\frac{du}{p-u})^2}+p^3\frac{dp}{\frac{du}{p-u}}+up^4+1=0. \qquad (8$$

Éliminons s entre les équations (7 et (8, ou tirons s de (8, et mettons sa valeur dans (7, nous obtiendrons :

$$(p-u)^3\frac{d^3p}{du^3}+(p-n)^2p\frac{d^2p}{du^2}+(p-u)p^3\frac{dp}{du}+p^4u+1=0. \qquad (9$$

Cette équation n'est plus que du 3^{me} ordre.

Exemp. Soit l'équation

$$dx^2+dy^2=my\,d^2y,$$

ou

$$1+(\frac{dy}{dx})^2=my\frac{d^2y}{dx^2}.$$

En posant $y=ux$, $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{x}$,

elle se réduira à la suivante :

$$1+p^2=muq.$$

Rem. On tire de l'équation trouvée

$$q=\frac{1+p^2}{mu};$$

donc

$$\frac{dx}{x}=\frac{dp}{q}=\frac{dp}{\frac{1+p^2}{mu}}=\frac{mudp}{1+p^2};$$

en divisant par u, on a :

$$\frac{dx}{xu}=\frac{dx}{y}=\frac{mdp}{1+p^2}.$$

Multiplions par p, et observons que $dy=pdx$, il vient

$$\frac{dy}{y}=\frac{mpdp}{1+p^2},$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

§ 27.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS ÉLEVÉES, EN ÉQUATIONS LINÉAIRES.

A. MÉTHODE DE MONGE.

ac·d·sc. 1785.

Soit une équation algébrique

$$Ay^m + Bxy^{m-1} + \ldots = 0, \qquad (1$$
$$A_1 y^{m-1},$$

dans laquelle les coëfficients A, B, etc., ne soient pas indépendants, mais dépendent de constantes primitives $a, b, c, \ldots$, en la différentiant autant de fois qu'on a de ces constantes $a, b, c, \ldots$, et qu'on élimine ces quantités, on aura une équation différentielle qui sera généralement d'un degré élevé par rapport à la plus haute dérivée. Or, si l'on différentie encore cette équation un nombre de fois assez grand pour, qu'à l'aide des différentielles précédentes, on puisse faire évanouir toutes les constantes, on aura précisément la même équation à laquelle on serait parvenu, si l'on avait différentié l'équation (1 un nombre de fois suffisant pour éliminer les coëfficients A, B, etc., regardés comme indépendants, c'est-à-dire, qu'on doit aboutir à une équation linéaire. Éclaircissons l'usage de cette Méthode par des exemples.

1^er^ *Exemple.* Soit l'équation

$$(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\,\frac{dy}{dx} + (1+y^2) = 0.$$

En la différentiant, il vient :

$$2(1+x^2)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\,\frac{dy}{dx} + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0;$$

ou : $\quad (1+x^2)\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad$ donc $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$

2^me^ *Exemp.* Soit l'équation

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx}(B + x^2 - Ay^2) - xy = 0.$$

En la différentiant, on trouve :

$$Ay\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Ax\,\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2Axy\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} +$$

$$\left(2x - 2Ay\,\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + (B + x^2 - Ay^2)\frac{d^2y}{dx^2} - y - x\,\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

ou :

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left[2Axy\,\frac{dy}{dx} + B + x^2 - Ay^2\right] + \left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]\left[x\,\frac{dy}{dx} - y\right] = 0.$$

Mais la proposée donne :

$$x^2 - Ay^2 + B = \frac{x - y - Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{dy}{dx}}\,,$$

substituons ceci dans l'équation précédente, nous aurons :

$$2y\,\frac{d^2y}{dx^2}\left[A\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1\right] + \left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]\left(x\,\frac{dy}{dx} - y\right)\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

ou $$xy\,\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\,\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

ou $$xy\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left\{x\,\frac{dy}{dx} - y\right\} = 0\,,$$

ou $$xy\,\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{dx} = 0.$$

En divisant par x^2, on trouve

$$\frac{y}{x}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d\left[\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}\right]}{dx} = 0\,,$$

ou $$\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = C\,;$$ équation linéaire.

3^{me} *Exemp.* Soit l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[(x^2y^2 + b^2)^2 - 4a^2x^2\right] + 8a^2xy\,\frac{dy}{dx} + (x^2 + y^2 + b^2)^2 - 4a^2y^2 = 0\,;$$

en la différentiant, et en éliminant b, on trouve, en faisant

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

$$\frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + dx = 0.$$

4^me^ *Exemp.* Soit l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (a^2 - x^2) + 2xy\,\frac{dy}{dx} + a^2 - y^2 = 0;$$

en la différentiant, on trouve

$$(a^2 - x^2)\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} + xy\,\frac{dy^2}{dx^2} = 0;$$

ou
$$\frac{d^2y}{dx^2}\left\{(a^2 - x^2)\,\frac{dy}{dx} + xy\right\} = 0,$$

d'où
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad (a^2 - x^2)\,\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

B. MÉTHODE D'EULER. *a)* MÉTHODE GÉNÉRALE.

Si l'équation est de la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + A\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + ky + L = 0,$$

on fera
$$\frac{dy}{dx} = p,$$

et l'on résoudra l'équation algébrique

$$p^n + Ap^{n-1} + \ldots + ky + L = 0.$$

Soient $p = r_1, r_2 \ldots r_n$, ses racines;

on aura les équations linéaires

$$p - r_1 = 0,\ p - r_2 = 0, \ldots p - r_n = 0.$$

Exemple. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$, donne $p^2 - a^2 = 0$, $p = +a, -a$,

d'où :
$$p - a = 0,\ p + a = 0, \qquad \text{ou}$$

$$\frac{dy}{dx} - a = 0, \quad \frac{dy}{dx} + a = 0.$$

b) Méthode particulière.

1er Cas. *La proposée ne contient que l'une des deux variables* x, y.

Si la proposée ne contient que x, elle sera de la forme

$$\psi(x,p)=0, \quad \text{d'où} \quad p=\varphi x;$$

donc
$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x).$$

Exemple. $x+a\frac{dy}{dx}=b\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$, devient :

$$x+ap=b\sqrt{1+p^2}, \qquad \text{d'où :}$$

$$p=\frac{a\pm\sqrt{(x^2-b^2)(b^2-a^2)+a^2}}{b^2-a^2}=\frac{dy}{dx}.$$

1re *Rem.* On peut aussi résoudre la proposée par rapport à x, ce qui donne

$$x=f(p), \quad dx=f'(p)\,dp;$$

donc
$$dy=pdx=f'(p)\cdot pdp.$$

L'exemple précédent donne :

$$x=-ap+b\sqrt{1+p^2},$$

$$dx=-adp+\frac{bpdp}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$dy=pdx=-apdp+\frac{bp^2dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

2me *Rem.* On pourrait aussi exprimer x et p en fonction d'une 3me variable u, on aurait alors :

$$x=F(u), \quad p=\xi(u),$$

donc
$$dy=pdx=\xi u\cdot F'u\cdot du.$$

Exemple. Soit $x^3+(\frac{dy}{dx})^3=ax\frac{dy}{dx}$, ou $x^3+p^3=apx$;

je ferai $p=ux$, alors on aura :

$$x^3+u^3x^3=aux^2, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{au}{u^3-1}, \quad \text{donc}$$

$$p=\frac{au^2}{u^3+1}, \quad \text{donc} \quad dy=pdx=\frac{a^2u^2(1-2u^3)du}{(1+u^3)^2}.$$

2me Cas. *L'équation est homogène par rapport à* x *et à* y.

Soit l'équation $f(x, y, p) = 0$;

je poserai $y = ux$, x s'en ira par la division, et la proposée sera de la forme $F(u, p) = 0$; par conséquent elle sera ramenée au cas précédent.

Exemple. L'équation $y - xp = nx\sqrt{1+p^2}$, pour $y = ux$, devient $u - p = n\sqrt{1+p^2}$, d'où :

$$u = p + n\sqrt{1+p^2}, \quad \text{et}$$

$$du = dp + \frac{npdp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Mais on a $dy = udx + xdu$, ou

$$pdx = [p + n\sqrt{1+p^2}]dx + x[dp + \frac{npdp}{\sqrt{1+p^2}}], \text{ ou}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dp}{n\sqrt{1+p^2}} - \frac{pdp}{1+p^2}.$$

3me Cas. *L'une des variables, par exemple* y, *n'entre dans la proposée qu'à la première puissance.*

Soit donc $f(x, y, p) = 0$, $p = \frac{dy}{dx}$, l'équation proposée; on la résoudra par rapport à y, ce qui donnera un résultat de la forme

$$y = F(x, p),$$

d'où l'on déduit, par la différentiation :

$$dy = Pdx + Qdp = pdx,$$

P et Q étant des fonctions de x et de p.

On a donc l'équation linéaire :

$$(P - p)dx + Qdp = 0.$$

Exemple. $ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, donne

$$y = px + a\sqrt{1+p^2};$$

donc, en différentiant cette dernière :

$$dy = pdx = pdx + xdp + a\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}},$$

ou : $$dp\left\{x+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\right\}=0;$$ d'où :

$$dp=0,\quad x+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}=0.$$

§ 28.

ÉLIMINATION DES CONSTANTES DES ÉQUATIONS PRIMITIVES.

1^er^ Problème. *Éliminer une seule constante* a *d'une équation primitive* $f=f(x,y)=0.$

Solution. La différentielle immédiate de cette équation est

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=0.$$

En éliminant a entre les équations (1 et (2, on aura une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

qui renfermera au moins une constante de moins que l'équation primitive.

2^me^ Probl. *Éliminer deux constantes* a, b, *d'une équation primitive* $f=f(x,y)=0.$ (1.

En différentiant l'équation (1. deux fois de suite, on aura les équations

$$\frac{df}{dx}=0,\quad \frac{d^2f}{dx^2}=0. \qquad (2.$$

Éliminons a et b entre les trois équations (1. et (2., on aura une équation du second ordre, de la forme

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0,$$

qui renfermera au moins deux constantes de moins que l'équation primitive.

En général, si nous différentions l'équation (1., n fois de suite, et qu'entre celles-ci et la primitive, on élimine n constantes, on

aura une équation différentielle du n^e ordre de la forme

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \qquad (a)$$

qui contiendra au moins n constantes de moins que l'équation primitive. Il suit de là, que l'intégrale complète d'une équation différentielle du n^e ordre de formule (a), contiendra n constantes arbitraires.

1^er^ *Exemple.* Éliminer a et b de l'équation

$$y + ax + b = 0.$$

On trouve successivement $\frac{dy}{dx} + a = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; donc, en éliminant a et b entre ces trois équations, on trouve

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

2^me^ *Exemp.* Soit $x^2 - 2ay + a^2 = b^2$, d'où :

$$x - a\frac{dy}{dx} = 0, \; 1 - a\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

en éliminant a et b entre ces trois équations on trouve :

$$\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

3^me^ *Exemp.* Éliminons c de $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = c(x-y)$; on trouve :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

4^me^ *Exemp.* Éliminer a, b, c de $(1-x)y = ax^2 + bx + c$. On trouvera :

$$(1-x)\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Rem. Les mêmes règles serviront à éliminer des facteurs irrationnels, ou transcendants d'une équation primitive.

1^er^ *Exemp.* Éliminer $e^{\frac{x}{y}}$ de l'équation $xe^{\frac{x}{y}} = c$.

On trouve : $xy + y^2 = \frac{dy}{dx} \cdot x^2$.

2^me *Exemp.* Éliminer $\log\left(\frac{x+y}{a}\right)$ de l'équation

$$\log\left(\frac{x+y}{a}\right)+\frac{x}{x+y}=0.$$

On trouve : $$\frac{dy}{dx}\cdot y+x+2y=0.$$

3^me *Exemp.* Éliminer $\sqrt{2(y^4-a^4)}$ de l'équation

$$\frac{1}{x}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2(y^4-a^4)}}.$$

On trouve : $$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot x^2+\frac{dy}{dx}\cdot x=4y^3.$$

§ 29.

ÉLIMINATION DES FONCTIONS ARBITRAIRES DES ÉQUATIONS PRIMITIVES.

A. CAS D'UNE SEULE ÉQUATION.

Soient $$\lambda=f(x,y,z),\quad \theta=F(x,y,z),$$

z étant la variable dépendante, pour exprimer que les expressions λ et θ subsistent ensemble, on dit que l'une est une fonction arbitraire de l'autre, et l'on pourra écrire explicitement

$$\lambda=\varphi(\theta),$$

ou, implicitement

$$\psi(\theta,\lambda)=0,$$

φ et ψ désignant des fonctions arbitraires.

1^er Problème. *Éliminer la fonction arbitraire* φ, *d'une équation explicite* $\lambda=\varphi(\theta)$;

λ *et* θ *étant des fonctions données de* x, y, z, *et* z *la variable principale, fonction des variables indépendantes* x *et* y.

Solut. En différentiant la proposée par rapport à x et à y, on aura :

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=\varphi'(\theta)\cdot\left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+\left(\frac{d\theta}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right],$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=\varphi'(\theta)\cdot\left[\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+\left(\frac{d\theta}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right].$$

En divisant ces équations, $\varphi'(\theta)$ partira, et l'on trouve, en chassant les dénominateurs :

$$\left[\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)-\left(\frac{d\theta}{dz}\right)\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)\right]\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)-\left(\frac{d\theta}{dz}\right)\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)\right]\left(\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

équation de la forme

$$P\left(\frac{dz}{dx}\right)+Q\left(\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

qui ne contient plus la fonction φ.

2^me^ Probl. *Les mêmes choses étant posées que dans le problème précédent, éliminer la fonction arbitraire ψ, quand λ est une fonction implicite de θ de la forme*

$$\psi(\lambda,\theta)=0.$$

En différantiant successivement par rapport à x, puis par rapport à y, on trouve

$$\left(\frac{d\psi}{d\lambda}\right)\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right]+\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)\left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+\left(\frac{d\theta}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right]=0,$$

$$\left(\frac{d\psi}{d\lambda}\right)\left[\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]+\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)\left[\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+\left(\frac{d\theta}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]=0.$$

Faisons passer les deux seconds termes dans l'autre membre, on trouve, en divisant :

$$\frac{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)}=\frac{\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+\left(\frac{d\theta}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+\left(\frac{d\theta}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)}.$$

1^er^ *Exemple.* Soient $\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$, éliminer la fonction arbitraire φ.

Soient $p=\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q=\left(\frac{dz}{dy}\right)$, on trouve, en différentiant d'abord par rapport à x, puis par rapport à y :

$$\frac{-(y-b)p}{(z-c)^2}=\frac{z-c-(x-a)p}{(z-c)^2}\cdot\varphi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right),$$

$$\frac{z-c-(y-b)q}{(z-c)^2}=\frac{-(x-a)q}{(z-c)^2}\cdot\varphi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

En divisant ces deux équations, on trouve, l'équation aux différences partielles

$$p(x-a)+q(y-b)=z-c.$$

2^me^ *Exemp.* Éliminer la fonction φ dans l'équation

$$y-bz=\varphi(x-az).$$

On trouve : $$-bp=(1-ap)\cdot\varphi'(x-az),$$

$$1-bq=-(aq)\cdot\varphi'(x-az),$$

d'où : $$\frac{bp}{1-bq}=\frac{1-ap}{aq},\quad \text{ou}\quad ap+bq=1.$$

3^me^ *Exemp.* On donne

$$ax+by+z=\varphi[(x-m)^2+(y-n)^2+z^2],$$

éliminer la fonction φ.

On trouve : $$p+a=\varphi'\cdot[2(x-m)+2zp],$$

$$q+b=\varphi'\cdot[2(y-n)+2zq];$$

on en tire, par la division :

$$\frac{p+a}{q+b}=\frac{x-m+pz}{y-n+qz},\quad \text{ou}$$

$$p[bz-(y-n)]-q[az-(x-m)]=a(y-n)-b(x-m).$$

Remarque. Au lieu de différentier l'équation proposée par rapport à x, puis par rapport à y, on peut aussi procéder de cette manière :

1. On différentiera une seule fois par rapport à x et à y, en regardant, comme constante, la quantité qui est sous le signe de la fonction ;

2. On substituera dans le résultat la valeur du rapport $\frac{dx}{dy}$, provenant de ce que la quantité sous le signe a été regardée comme constante. Si ω désigne cette quantité, elle sera une fonction de x et de y, et comme elle est constante, on a

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\omega}{dy}\right)dy=0,\quad \text{d'où}$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{\frac{d\omega}{dy}}{\frac{d\omega}{dx}}=m.$$

Exemple. Soit $y - bz = \varphi(x - az) = \varphi\omega$, $\omega = x - az$.

Si ω est regardé comme constant, on trouve, en différentiant $\omega = x - az$, l'équation suivante

$$(1 - a(\frac{dz}{dx}))\,dx - a(\frac{dz}{dy})dy = 0\,;\quad \text{d'où :}$$

$\frac{dx}{dy} = \frac{aq}{1 - ap}$. C'est la quantité que nous avons représentée par m.

Prenons maintenant la différentielle totale de

$$y - bz = \omega\omega,$$

en considérant ω, donc $\varphi\omega$, comme constant, on aura :

$$dy - b(\frac{dz}{dx})dx - b(\frac{dz}{dy})dy = 0,$$

ou $$1 - bp \cdot \frac{dx}{dy} = bq.$$

Substituons la valeur ci-dessus de $\frac{dx}{dy}$, on aura

$$1 - bp \cdot \frac{aq}{1 - ap} = bq\,,\quad \text{ou}\quad ap + bq = 1.$$

B. CAS DE PLUSIEURS ÉQUATIONS.

Si les équations proposées contiennent plusieurs fonctions arbitraires de la même quantité, il faudra, en procédant par la méthode de la remarque précédente, différentier chaque équation autant de fois qu'il y a de fonctions à éliminer. Nous désignerons toujours par m la valeur de $\frac{dx}{dy}$, déduite de l'équation

$$\omega = f(x, y, z) = \text{const},$$

z étant regardée comme fonction de x et de y.

1^er^ *Exemple.* Soient les deux équations

1.) $$z = x\varphi\omega + \omega,$$

2.) $$y = x\psi\omega + \xi\omega,$$

éliminer les trois fonctions arbitraires φ, ψ, ξ.

1° Je différentie l'équation 1.) trois fois, en regardant $\omega, \varphi\omega$ comme constants, et z comme une fonction de x et de y, on aura

$$\frac{dx}{dy}(\frac{dz}{dx}) + (\frac{dy}{dx}) = \frac{dx}{dy} \cdot \varphi\omega,\ \text{ou}\ mp + q = m \cdot \varphi\omega. \qquad (\alpha$$

Soit $(\frac{dp}{dx}) = \frac{d^2z}{dx^2}) = r$, $(\frac{dq}{dx}) = (\frac{dp}{dy}) = (\frac{d^2z}{dxdy}) = s$,

$$(\frac{dq}{dy}) = (\frac{d^2z}{dy^2}) = t.$$

Soit de plus $\frac{dm}{dy} = \frac{d^2x}{dy^2} = m'$, on aura, en différentiant (α :

$$pdm + m[(\frac{dp}{dx})dx + (\frac{dp}{dy})dy] + (\frac{dq}{dx})dx + (\frac{dq}{dy})dy = dm \cdot \varphi\omega.$$

Ordonnons et divisons par dx, on aura :

$$m'p + m^2r + 2ms + t' = m' \cdot \varphi\omega. \qquad (\beta$$

Différentions de nouveau celle-ci de la même manière, et fesons

$$\frac{dm'}{dy} = \frac{d^2x}{dy^2} = m'', \text{ nous trouverons :}$$

$$m''p + 3m'(mr + s) + m^3(\frac{d^3z}{dx^3}) + 3m^2(\frac{d^3z}{dx^2dy}) + 3m(\frac{dz^3}{dxdy^2}) + (\frac{d^3z}{dy^3}) = m'' \cdot \varphi\omega \ldots \quad (\gamma$$

2° Si l'on différentie la seconde équation aussi trois fois de suite, par le même procédé, on trouvera :

$$1 = m\psi\omega, \qquad (\alpha'$$

$$0 = m' \cdot \psi\omega, \qquad (\beta'$$

$$0 = m'' \cdot \psi\omega; \qquad (\gamma'$$

de ces deux dernières on tire $m' = 0$, $m'' = 0$, par là les équations (β et (γ deviennent :

$$m^2r + 2ms + t = 0,$$

$$m^3(\frac{d^3z}{dx^3}) + 3m^2(\frac{d^3z}{dx^2dy}) + 3m(\frac{d^3z}{dxdy^2}) + (\frac{d^3z}{dy^3}) = 0.$$

En éliminant enfin m, entre ces deux dernières équations, on aura l'équation cherchée, privée des trois fonctions arbitraires et de la quantité ω.

2^{me} *Exemp.* Soit proposé de faire évanouir les deux fonctions arbitraires, et leurs dérivées, dans les équations

$$z - \psi\omega = (x - \omega) \cdot \psi'\omega,$$

$$y - \varphi\omega = (x - \omega) \cdot \varphi\omega,$$

ainsi que la quantité ω, fonction de x, y, z.

Solution. 1° La première différentiée deux fois de suite, donne

$$mp + q = m\psi'\omega,$$
$$m'p + m^2r + 2ms + t = m'\psi'\omega. \qquad (a)$$

2° En différentiant la seconde deux fois de suite, on obtient :

$$1 = m\varphi'\omega,$$
$$0 = m' \cdot \varphi'\omega.$$

Celle-ci donne $m' = 0$, donc (a) devient :

$$m^2r + 2ms + t = 0. \qquad (b)$$

Pour éliminer m, je différentie (b), en regardant m comme seule variable, ce qui donne

$$mr + s = 0; \qquad (c)$$

on a donc aussi, par (b),

$$ms + t = 0. \qquad (d)$$

En éliminant m entre celles-ci, on aura l'équation cherchée

$$rt = s^2.$$

§ 30.

ÉLIMINATION DE DÉRIVÉES DANS LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

1 ^er^ Problème. *On donne* $m+2$ *équations entre les quantités*

$$y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^m y}{dx^m},$$
$$x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \cdots$$

éliminer les $m+1$ *quantités*, $y, \frac{dy}{dx} = p, \cdots \frac{d^m y}{dx^m} = w.$

Solution. On éliminera, par les procédés algébriques ordinaires, entre les $m+2$ équations proposées, les $m+1$ quantités $z, p, \ldots w$, on obtiendra pour résultat une équation de la forme

$$F(x, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \cdots) = 0,$$

qui ne renfermera plus que x, et les dérivées des divers ordres de z.

2^me^ PROBL. *Étant donné deux équations*

$$A\frac{d^{\alpha}y}{dx^{\alpha}} + \text{etc.} + B\frac{d^{\beta}z}{dx^{\beta}} + \text{etc.} = 0,$$

$$A_1\frac{d^{\alpha}y}{dx^{\alpha}} + \text{etc.} + B_1\frac{d^{\beta}z}{dx^{\beta}} + \text{etc.} = 0,$$

chacune de l'ordre α *par rapport aux dérivées de* y, *et de l'ordre* β *par rapport aux dérivées de* z, *éliminer* y, *et ses dérivées* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc.

Solution. Différentions ces équations α fois de suite, soit $2\alpha = m$, on obtiendra $m+2$ équations entre les $m+1$ quantités y, $\frac{dy}{dx}$, ... $\frac{d^m y}{dx^m}$; le problème est par conséquent ramené au cas du problème précédent, et l'on achèvera l'opération comme il est dit dans ce problème.

3^me^ PROBL. *On donne deux équations*

$$A\frac{d^{\alpha}y}{dx^{\alpha}} + \text{etc.} + B\frac{d^{\beta}z}{dx^{\beta}} + \ldots = 0,$$

$$A_1\frac{d^{a}y}{dx^{a}} + \text{etc.} + B_1\frac{d^{b}z}{dx^{b}} + \ldots = 0,$$

la première de l'ordre α *en* y, *de l'ordre* β *en* z, *la seconde de l'ordre* a *en* y, *de l'ordre* b *en* z, *éliminer les quantités*

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ etc.}$$

Solution. Différentions la première a fois, la seconde α fois, on aura $a+\alpha = m$ nouvelles équations, donc en tout $m+2$ équations entre les $m+1$ quantités y, $\frac{dy}{dx}$, ... $\frac{d^m y}{dx^m}$; le problème est dès-lors ramené au cas du premier problème, et la solution s'achèvera comme dans ce problème.

4^me PROBL. *Entre les* n+1 *variables* x, y, z, ... s, t, t *étant la variable indépendante, on donne les* n *équations du* 1^er *ordre*

$$\frac{dx}{dt}=\varphi_1,\quad \frac{dy}{dt}=\varphi_2,\ \dots\ \frac{ds}{dt}=\varphi_n,\quad (1$$

dans lesquelles les 2^de *membres désignent des fonctions données de* x, y, ... s, t, *éliminer toutes les variables principales* y, z, ... s, *et leurs dérivées, de manière à obtenir pour résultat une équation différentielle, qui ne renferme plus que* x *et* t, *et les dérivées de* x *par rapport à* t.

Solution. Différentions $n-1$ fois de suite l'équation $\frac{dx}{dt}$, on aura d'abord

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)+\dots+\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right).$$

En substituant ici les valeurs des dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, ..., données par les équations (1, le second membre sera une fonction connue de $x, y, \dots s, t$, que je représenterai par f_2, en sorte que l'on a : $\frac{d^2x}{dt^2}=f_2$.

On trouvera ensuite, par des opérations semblables, successivement $\frac{d^3x}{dt^3}=f_3$, etc. $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}=f_{n-1}$, $\frac{dx^n}{dt^n}=f_n$.

On aura ainsi les n équations

$$\frac{dx}{dt}=\varphi_1,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=f_2,\dots\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}=f_{n-1},\quad \frac{dx^n}{dt^n}=f_n.\quad (2$$

Des $n-1$ premières de ces équations on déduira, par l'élimination, les valeurs des $n-1$ inconnues $y, z, \dots s$; en substituant ensuite les valeurs de ces inconnues dans la dernière des équations (2, on aura une relation de la forme

$$\frac{d^nx}{dt^n}=F\left\{t, x, \frac{dx}{dt}, \dots \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right\},$$

qui sera l'équation cherchée.

Exemple. Soient les trois équations

$$(\alpha)\qquad \frac{dx}{dt}=a(y+z),\quad \frac{dy}{dt}=b(x+z),\quad \frac{dz}{dt}=c(x+y);$$

éliminer y, z et les dérivées de ces variables.

En différentiant la première deux fois, on trouve :

$$(\beta) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = a\left(\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}\right) = a(b+c)x + acy + abz,$$

$$(\gamma) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} = 2abcx + a(ab+ac+bc)(y+z).$$

La première des équations (α), combinée avec l'équation (β), donnera

$$y = \frac{1}{a(c-b)}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} - b\frac{dx}{dt} - a(b+c)x\right\},$$

$$z = \frac{1}{a(b-c)}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} - c\frac{dx}{dt} - a(b+c)x\right\}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (γ), ou mieux, en remplaçant dans (γ), $(ya+z)$ par sa valeur $\frac{dx}{dt}$, on obtient l'équation cherchée

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 2abcx + (ab+ac+bc)\frac{dx}{dt} = Ax + B\frac{dx}{dt}.$$

Remarque. On peut ramener au problème précédent les équations simultanées d'ordres supérieurs au premier, en posant

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx'}{dt} = x'', \quad \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dx''}{dt} = x''', \ \ldots$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy'}{dt} = y'', \quad \frac{d^3y}{dt^3} = \frac{dy''}{dt} = y''', \ldots$$

et en regardant $x', x'', \ldots y', y'' \ldots$, comme de nouvelles variables. On aura ainsi des équations du 1er ordre, mais contenant un plus grand nombre de variables.

Exemple. $\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 2x$, $\frac{dy}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = 2y$.

Je fais $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$, on aura les équations du 1er ordre

$$\frac{dy'}{dt} = 2x - x', \quad \frac{dx'}{dt} = 2y - y'. \qquad (1)$$

Différentions cette dernière deux fois, nous aurons :

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 2y' - \frac{dy'}{dt} = 2y' - (2x - x') \qquad (2)$$

$$\frac{d^3x'}{dt^3} = 2\frac{dy'}{dt} - 2x' + \frac{dx'}{dt}$$
$$= 2(2x - x') - 2x' + \frac{dx'}{dt};$$

y étant éliminé, ainsi que les dérivées de y, celle-ci sera l'équation cherchée; elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{d^4x}{dt^4} - \frac{d^2x}{dt} + 4\frac{dx}{dt^2} - 4x = 0.$$

THÉORÈME. *Soit un système d'équations linéaires à coëfficients constants, tel que*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + M\frac{d^2y}{dx^2} + N\frac{dy}{dx} + Py + Qz = 0.$$
$$\frac{d^m z}{dx^m} + \ldots + M'\frac{dy}{dx} + N'y + P' = 0.$$

entre x, y *et* z, *et les dérivées de* y *et de* z, *je dis que ces équations seront satisfaites par les substitutions*

$$y = e^{\lambda x},\quad z = ae^{\lambda x}.$$

Solution. Car on a $\frac{dy^n}{dx^n} = \lambda^n e^{\lambda x},\ \frac{d^n z}{dx^n} = a\lambda^n e^{\lambda x}.$

Donc en substituant ces valeurs dans les proposées, celles-ci deviendront algébriques, savoir :

$$\lambda^n + \ldots + M\lambda^2 + N\lambda + P + Qa = 0,$$
$$a\lambda^m + \ldots + M'\lambda + N' + P'a = 0. \qquad (\alpha)$$

Or, en éliminant a entre ces équations, on aura une équation en λ, telle que

$$f(\lambda) = 0.$$

Elle déterminera les valeurs de $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, donc (α) donnera les valeurs correspondantes de $a = a_1, a_2, \ldots$, par lesquelles les substitutions $y = e^{\lambda x}$, $z = ae^{\lambda x}$, rendront identiques les proposées. Celles-ci seront donc encore satisfaites par les sommes

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \text{etc.},$$
$$z = a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} + \text{etc.}$$

§ 31.

TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.

Si l'on a une équation différentielle entre les variables x, y, z, et les dérivées de z, considérée comme l'unique variable principale, cette équation de la forme

$$f\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} = 0,$$

contiendra les deux inconnues

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q,$$

et par conséquent ces inconnues devront être considérées comme indéterminées.

En général, les équations aux différentielles partielles, dont le nombre est toujours inférieur à celui des dérivées partielles inconnues qu'elles renferment, doivent être considérées comme des équations indéterminées, dans lesquelles on pourra par conséquent disposer des valeurs des dérivées inconnues pour transformer les équations données en équations différentielles ordinaires.

A. TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES DU 1er ORDRE.

1er Problème. P, Q, R, *étant des fonctions de* x, y, z,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q,$$

décomposer l'équation aux différentielles partielles

$$Pp + Qq - R = 0, \qquad (1)$$

en équations différentielles ordinaires, ou ne contenant plus que deux variables chacune.

Solution. De l'équation :

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy = p\,dx + q\,dy,$$

on tire $$p = \frac{dz}{dx} - q\,\frac{dy}{dx},$$

et aussi : $q = \frac{dz}{dy} - p\frac{dx}{dy}$,

par là l'équation (1) peut s'écrire :

$$P\left(\frac{dz}{dx} - q\frac{dy}{dx}\right) + Qq - R = 0,$$

ou

$$Pp + Q\left(\frac{dz}{dy} - p\frac{dx}{dy}\right) - R = 0.$$

De là : $Pdz - Rdx = q(Pdy - Qdx)$, ou

$$Qdz - Rdy = p(Pdy - Qdx).$$

p et q étant indéterminés, ces équations ne pourront subsister à moins qu'on n'ait à la fois

$$Pdz - Rdx = 0,\ Pdy - Qdx = 0,\ Qdz - Rdy = 0. \quad (2$$

On peut aussi écrire ces équations sous cette forme :

$$\frac{dz}{R} = \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}. \quad (3$$

Les équations (2), qui remplacent la proposée (1), sont des équations différentielles ordinaires ou totales, dont chacune ne renferme que les différentielles de deux variables.

1^er^ *Exemp.* L'équation $py - qx = 0$, se décompose en

$$\frac{dx}{y} = \frac{-dy}{x}.$$

2^me^ *Exemp.* L'équation $p(y - Bz) - q(x - Az) + Ay - Bx = 0$, est remplacé par

$$\frac{dx}{y - Bz} = \frac{dy}{Az - x} = \frac{dz}{Bx - Ay}.$$

3^me^ *Exemp.* L'équation $px + qz + y = 0$, est remplacée par :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z} = \frac{-dz}{y}.$$

2^me^ PROBL. *Soit* $z=f(x,y,u)$, *une fonction primitive des trois variables indépendantes* x, y, u, *ayant donné lieu à l'équation aux différentielles partielles*

$$P\left(\frac{dz}{dx}\right)+Q\left(\frac{dz}{dy}\right)+R\left(\frac{dz}{du}\right)-S=0, \quad \text{ou}$$

$$Pp+Qq+Rr-S=0, \qquad (1)$$

transformer cette équation, en équations ordinaires simultanées.

Solution. On a :

$$dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy+\left(\frac{dz}{du}\right)du=pdx+qdy+rdu, \quad \text{d'où :}$$

$$p=\frac{dz}{dx}-q\frac{dy}{dx}-r\frac{du}{dx},$$

$$q=\frac{dz}{dy}-p\frac{dx}{dy}-r\frac{du}{dy},$$

$$r=\frac{dz}{du}-p\frac{dx}{du}-q\frac{dy}{du}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans la proposée (1), elle prendra ces trois formes :

$$P\left(\frac{dz}{dx}-q\frac{dy}{dx}-r\frac{du}{dx}\right)+Qq+Rr-S=0, \quad \text{ou}$$

$$Pdz-Sdx=q(Pdy-Qdx)+r(Pdu-Rdx),$$

$$Pp+Q\left(\frac{dz}{dy}-p\frac{dx}{dy}-r\frac{du}{dy}\right)+Rr-S=0, \quad \text{ou}$$

$$Qdz-Sdy=-p(Pdy-Qdx)+r(Qdu-Rdq),$$

$$Pp+Qq+R\left(\frac{dz}{du}-p\frac{dx}{du}-q\frac{dy}{du}\right)-S=0, \quad \text{ou}$$

$$Rdz-Sdu=-p(Pdu-Rdx)-q(Qdu-Rdy).$$

Chacune devant subsister indépendamment de p, q, r, qui ne doivent pas être déterminés, il faut que les facteurs, qui multiplient ces indéterminées, soient simultanément égaux à zéro, et que l'on ait :

$$Pdz-Sdx=0, \quad Pdy-Qdx=0, \quad Pdu-Rdx=0,$$

$$Qdz-Sdy=0, \quad Qdu-Rdy=0,$$

$$Rdz-Sdu=0.$$

On peut mettre ces équations sous la forme

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R} = \frac{dz}{S}.$$

1^er^ *Exemple.* L'équation

$$r + ap + bq = 0,$$

se transforme en :

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{1}.$$

2^me^ *Exemp.* L'équation

$$(u+y+z)p + (u+x+z)q + (x+y+z)r - (u+x+y) = 0,$$

se transforme en

$$\frac{dx}{u+y+z} = \frac{dy}{u+x+z} = \frac{du}{x+y+z} = \frac{dz}{u+x+y}.$$

3^me^ *Exemp.* L'équation

$$xp + yq + ur + ts - az = 0,$$

dans laquelle on a

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right),\ q = \left(\frac{dz}{dy}\right),\ r = \left(\frac{dz}{du}\right),\ s = \left(\frac{dz}{dt}\right),$$

se transforme en

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} = \frac{dt}{t} = \frac{dz}{az}.$$

B. TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE.

1^er^ Problème. *En posant* $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = r$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = s$, $\left(\frac{d^2z}{dq^2}\right) = t$, *et en désignant par* A, B, C, D, *des fonctions quelconques de* x, y, z, $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, *transformer l'équation*

$$Ar + Bs + Ct + D = 0, \qquad (1)$$

en équations différentielles ordinaires.

Solution. La fonction primitive étant de la forme $z = f(x, y)$, on en déduit : $dz = pdx + qdy$,

L'équation (1) exprime une simple relation entre les inconnues r, s, t, et ne peut servir à les déterminer.

1° Éliminons s et t, par les équations

$$s = \frac{dp}{dy} - r\frac{dx}{dy}, \quad t = \frac{dq}{dy} - s\frac{dx}{dy},$$

on trouvera

$$Bdpdy + Cdqdy - Cdpdx + Ddy^2 = -r[Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2]. \quad (\alpha)$$

2° Éliminons r et t, par les équations

$$r = \frac{dp}{dx} - s\frac{dy}{dx}, \quad t = \frac{dq}{dy} - s\frac{dx}{dy},$$

on trouvera :

$$Adpdy + Cdqdx + Ddxdy = s[Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2]. \quad (\beta$$

3° Éliminons r et s, on trouvera :

$$Adpdx - Adqdy + Bdqdx + Ddx^2 = -t[Ady^2 - Bdxdy - Cdx^2]. \quad (\gamma$$

Les équations $(\alpha, (\beta, (\gamma$, ne doivent pas déterminer r, s, t, et par conséquent elles doivent avoir lieu indépendamment de ces quantités, c'est-à-dire, chacun des deux membres de ces équations doit être nul par lui-même, et l'on a en même temps

$$Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0, \quad \text{ou} \quad A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

$$Adpdy + Cdqdx + Ddxdy = 0, \quad \text{ou} \quad A\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} + C\frac{dq}{dx} + D\frac{dy}{dx} = 0$$

$$Bdpdy + C(dqdy - dpdx) + Ddq^2 = 0, \quad \text{ou}$$

$$B\frac{dp}{dx}\frac{dy}{dx} + C\left(\frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx} - \frac{dp}{dx}\right) + D\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$A(dpdx - dqdy) + Bdqdx + Ddx^2 = 0, \quad \text{ou}$$

$$A\left(\frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx}\right) + B\frac{dq}{dx} + D = 0.$$

1^er^ *Exemple.* Transformer $Ar + Bs + Ct + D = 0$, A, B, C, D étant des constantes.

On trouve les deux équations ordinaires

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0,$$

$$A\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} + C\frac{dq}{dx} + D\frac{dy}{dx} = 0.$$

2^me *Exemp.* Transformer l'équation

$$q^2r - 2pqs + p^2l = 0.$$

On trouve ici les équations différentielles ordinaires :

$$q^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2pq\,\frac{dy}{dx} + p^2 = 0,$$

$$q^2\,\frac{dp}{dx}\,\frac{dy}{dx} + p^2\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

2^me PROBL. *Transformer l'équation*

$$Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + F = 0,$$

les coëfficients A, B, ... F *étant constants.*

Solution. En opérant, comme dans le problème précédent, on trouve les deux équations ordinaires

$$Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0,$$
$$Adpdy + Cdqdx + dxdy(Dp + Eq + F) = 0.$$

3^me PROBL. *Transformer l'équation différentielle partielle à quatre variables*

$$A\left(\frac{d^2z}{du^2}\right) + B\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + C\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + D\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) +$$
$$E\left(\frac{d^2z}{dydu}\right) + F\left(\frac{d^2z}{dudx}\right) + G = 0, \quad (1$$

A, B, ... *étant fonction des quatre variables* z, u, x, y, *et de leurs dérivées partielles du* 1^er *ordre.*

Solution. Des trois équations

$$d\,\frac{dz}{du} = \left(\frac{d^2z}{du^2}\right)du + \left(\frac{d^2z}{dudx}\right)dx + \left(\frac{d^2z}{dudy}\right)dy,$$

$$d\,\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^2z}{dxdu}\right)du + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx + \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dy,$$

$$d\,\frac{dz}{dy} = \left(\frac{d^2z}{dydu}\right)du + \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)dx + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy,$$

on tire les valeurs de $\left(\frac{d^2z}{du^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, et on les substitue

dans l'équation (1) ; on aura :

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)[D\,du\,dx\,dy - B\,du\,dy^2 - C\,du\,dx^2] +$$

$$\left(\frac{d^2z}{dudy}\right)[E\,du\,dx\,dy - A\,dx\,dy^2 - C\,du^2\,dx] +$$

$$\left(\frac{d^2z}{dudx}\right)[F\,du\,dx\,dy - A\,dx^2dy - B\,du^2dy] +$$

$$A\,dx\,dy \cdot d\frac{dz}{du} + B\,du\,dy\,d\frac{dz}{du} + C\,du\,dx\,d\frac{dz}{dy} + G\,du\,dx\,dy = 0.$$

Les quantités $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dudy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dudx}\right)$ étant indéterminées, cette équation ne subsistera qu'en ayant en même temps

$$C\,dx^2 - D\,dx\,dy + B\,dy^2 = 0,$$
$$A\,dy^2 - E\,dy\,du + C\,du^2 = 0,$$
$$B\,du^2 - F\,du\,dx + A\,dx^2 = 0,$$

$$A\,dx\,dy\,d\frac{dz}{du} + B\,du\,dy\,d\frac{dz}{dx} + C\,du\,dx\,d\frac{dz}{dy} + G\,du\,dx\,dy = 0.$$

Les trois premières étant entre les quantités $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dx}$, ne peuvent avoir lieu à moins que l'équation de condition suivante ne soit satisfaite :

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = 4ABC + DEF.$$

C. ÉQUATIONS DU 3me ORDRE.

PROBL. *Soit* $dr = \alpha\,dx + \beta\,dy$, $ds = \beta\,dx + \gamma\,dy$, $dt = \gamma\,dx + \varepsilon\,dy$, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ *étant les quatre coëfficients différentiels partiels du* 3me *ordre, on propose de transformer*

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\varepsilon + E = 0,$$

en équations ordinaires ; A, B, ... *sont des fonctions de* x, y, z, p, q, r, s, t.

Solution. Il faut éliminer trois des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, par exemple les trois dernières, on aura :

$$\alpha[A\,dy^3 - B\,dy^2dx + C\,dy\,dx^2 + D\,dx^3] + dy^2[B\,dr + C\,ds + D\,dt] -$$
$$dx\,dy[C\,dr + D\,ds] + dx^2\,D\,dr + E\,dy^3 = 0.$$

Celle-ci doit avoir lieu indépendamment de α, on a donc les deux équations différentielles ordinaires :

$$Ady^3 - Bdy^2dx + Cdydx^2 - Ddx^3 = 0,$$

$$dy^2[Bdr + Cds + Ddt] - dxdy[Cdr + Dds] + Ddx^2dr + Edy^3 = 0.$$

Exemple. Soit l'équation

$$t^3\alpha + 3t^2u\beta + 3tu^2\gamma + u^3\varepsilon = 0;$$

elle sera remplacée par les deux équations ordinaires :

$$t^3dy^3 - 3t^2udy^2dx + 3tu^2dydx^2 - u^3dx^3 = 0,$$

$$dy^2(3t^2dr + 3tuds + u^2dt) - dxdy(3utdr + u^2ds) + u^2dx^2dr = 0.$$

§ 32.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS, DONNÉES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

A. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

1^er^ PROBLÈME. y *étant une fonction de* x, *donnée par l'équation différentielle du* m^e^ *ordre*

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}) = 0, \qquad (1)$$

trouver le développement en série de la fonction inconnue $y = fx$, *équation primitive de l'équation différentielle donnée.*

Solution. De l'équation proposée (1), résolue par rapport à $\frac{d^m y}{dx^m}$, on tire par la différentiation :

$$f^{(m)}x = \frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}})$$

$$f^{(m+1)}x = \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = \varphi(x, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m})$$

$$f^{(m+2)}x = \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} = \varphi(x, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}), \text{ etc.}$$

Mais si, dans la seconde de ces équations, on substitue à la place de $\frac{d^m y}{dx^m}$, sa valeur fournie par la première, si ensuite on

substitue dans la troisième pour $\frac{d^m y}{dx^m}$ sa valeur fournie par la première, et pour $\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}$, la valeur donnée par la seconde, et ainsi de suite, il est clair que toutes les dérivées, à partir de la m^e, seront exprimées en fonction des dérivées première, deuxième, $m-1^e$; on aura donc des équations de cette forme :

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f^{(m)}x = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) = \varphi\left[x, fx, f'x, \ldots f^{(m-1)}x\right],$$

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = f^{(m+1)}x = \varphi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) = \varphi_1\left[x, fx, f'x, \ldots f^{(m-1)}x\right],$$

$$\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} = f^{(m+2)}x = \varphi_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{m+1}y}{dx^{m-1}}\right) = \varphi_2\left[x, fx, f'x, \ldots f^{(m-1)}x\right],$$

etc. etc.

Pour $x = a$, ces expressions deviennent :

$$f^{(m)}a = \varphi\left[a, fa, f'a, \ldots f^{(m-1)}a\right],$$

$$f^{(m+1)}a = \varphi_1\left[a, fa, f'a, \ldots f^{(m-1)}a\right],$$

$$f^{(m+2)}a = \varphi_2\left[a, fa, f'a, \ldots f^{(m-1)}a\right], \text{ etc.}$$

Mais on a, par la formule générale de Maclaurin

$$y = fx = f(a) + \frac{x-a}{1} f'a + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''a + \ldots +$$

$$\frac{(x-a)^{m-1}}{1\cdot 2\ldots m-1} f^{(m-1)}a + \frac{(x-a)^m}{1\cdot 2\ldots m} f^{(m)}a + \frac{(x-a)^{m+1}}{1\cdot 2\ldots m+1} f^{(m+1)}a +$$

$$\frac{(x-a)^{m+2}}{1\cdot 2\ldots m+2} f^{(m+2)}a + \text{ etc.} \quad (2)$$

En substituant dans cette formule les valeurs de $f^{(m)}a$, $f^{(m+1)}a$, etc., obtenues par les équations précédentes, on aura le développement cherché, dans lequel entreront les m constantes inconnues, ou arbitraires

$$fa, f'a, \ldots f^{(m-1)}a.$$

Rem. L'arbitraire a doit être choisie de manière qu'aucun des termes de l'expression (2), ne se réduise à la forme $\frac{1}{0}$. Quelquefois la série (2) peut être sommée, alors on trouve la valeur de y sous une forme finie. Dans tous les cas la série (2) doit être convergente.

1^er^ *Exemple.* Trouver le développement de la fonction inconnue

$$y = fx,$$

donnée par l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + ay + bx^3 = 0, \quad \text{ou}$$

$$f'x + af x + bx^3 = 0.$$

On trouve, par des différentiations consécutives :

$$f'x + af x + bx^3 = 0,$$
$$f''x + af'x + 3bx^2 = 0,$$
$$f'''x + af''x + 6bx = 0,$$
$$f^{IV}x + af'''x + 6b = 0, \quad \text{etc.}$$
$$f^{(4+m)}x + af^{(3+m)}x = 0.$$

Fesons $x=0$, on tire des équations précédentes :

$$f'(0) = -af(0),$$
$$f''(0) = a^2 f(0),$$
$$f'''(0) = -a^3 f(0),$$
$$f^{IV}(0) = a^4 f(0) - 6b, \quad \text{etc.}$$
$$f^{(4+m)}(0) = -af^{(3+m)}(0).$$

On a donc, par la formule particulière de Maclaurin :

$$y = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + f'''(0)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.},$$

$$= f(0) + x[-af(0)] + \frac{x^2}{1\cdot 2}[a^2 f(0)] + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}[-a^3 f(0)] +$$
$$\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 4}[a^4 f(0) - 6b] + \text{etc.},$$

$$= f(0)\left[1 - ax + \frac{a^2x^2}{1\cdot 2} - \frac{a^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}\right]$$
$$- 6b\left(\frac{x^4}{1\cdot 2\ldots 4} - \frac{ax^5}{1\cdot 2\ldots 5} + \frac{a^2x^6}{1\cdot 2\ldots 6}\right) + \text{etc.}$$

2^me^ *Exemp.* Développer la fonction $y = fx$, donnée par l'équation $x\frac{dy}{dx} + y + ax^m = 0$, ou

$$xf'x + fx + ax^m = 0.$$

On trouve

$$xf'x + fx + ax^m = 0,$$
$$xf''x + 2f'x + max^{m-1} = 0,$$
$$xf'''x + 3f''x + m(m-1)ax^{m-2} = 0, \quad \text{etc.}$$

$$x f^{(m+1)}x + (m+1) f^{(m)}x + 1.2...m \cdot a = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x f^{(m+n)}x + (m+n) f^{(m+n-1)}x = 0.$$

our $x=0$, toutes les dérivées disparaissent, à l'exception de

$$f0^{(m)} = -\frac{1.2...m}{m+1} \cdot a,$$

a donc
$$y = -\frac{ax^m}{m+1}.$$

B. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.

Ire MÉTHODE. (PAR LA FORMULE DE MACLAURIN).

Soit proposé de développer $z = f(t, x)$, quand cette fonction est donnée par une équation aux différentielles partielles, par exemple, par la suivante :

$$\frac{dz}{dt} = b\frac{d^2z}{dx^2}. \qquad (1)$$

Solution. Supposons que z deviennent $Z = \varphi x$ pour $t = a$,

que $\frac{dz}{dt}$ devienne $Z' = b\frac{d^2Z}{dx^2} = b\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$,

que $\frac{d^2z}{dt^2}$ » $Z'' = b\frac{d^2Z'}{dx^2} = b^2\frac{d^4Z}{dx^4} = b^2\frac{d^4\varphi x}{dx^4}$,

que $\frac{d^3z}{dt^3}$ » $Z''' = b\frac{d^2Z''}{dx^2} = b^3\frac{d^6Z}{dx^6} = b^3\frac{d^6\varphi x}{dx^6}$

On aura
$$z = Z + (t-a)Z' + \frac{(t-a)^2}{1.2}Z'' + \frac{(t-a)^3}{1.2.3}Z''' + \text{etc.},$$
$$= \varphi x + (t-a)b\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{(t-a)^2}{1.2}b^2\frac{d^4\varphi x}{dx^4} + \frac{(t-a)^3}{1.2.3}b^3\frac{d^6\varphi}{dx}$$

Pour $a=0$, on a :
$$z = \varphi x + bt\frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \frac{b^2t^2}{1.2}\frac{d^4\varphi x}{dx^4} + \frac{b^3t^3}{1.2.3}\frac{d^6\varphi x}{dx^6} -$$

Mais en développant φx par le théorème de Maclaurin, on a :

$$\varphi x = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \varphi''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \varphi'''(0)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \varphi^{IV}(0)\frac{x^4}{1\cdot 2\ldots 4} + \varphi^{(V)}(0)\frac{x^5}{1\cdot 2\ldots 5} + \text{etc. ;}$$

d'où :

$$\frac{d^2\varphi x}{dx^2} = \varphi''(0) + \varphi'''(0)x + \varphi^{IV}(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \varphi^{V}(0)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.,}$$

$$\frac{d^4\varphi x}{dx^4} = \varphi^{IV}(0) + \varphi^{(V)}0\cdot x + \text{etc.}$$

etc.

Donc z devient :

$$z = \varphi(0) + \varphi''(0)bt + \ldots + \frac{\varphi^{IV}(0)b^2t^2}{1\cdot 2} + (\varphi'(0) + \varphi'''(0)bt + \varphi^{V}(0)\frac{b^2t^2}{1\cdot 2} + \ldots)x +$$

$$(\varphi''(0) + \varphi^{IV}(0)bt + \ldots)\frac{x^2}{1\cdot 2} + (\varphi'''(0) + \varphi^{V}(0)bt + \ldots)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$

Soient $\varphi(0) + \varphi''(0)bt + \frac{\varphi^{IV}(0)b^2t^2}{1\cdot 2} + \ldots = \psi(t)$,

$$\varphi'(0) + \varphi'''(0)bt + \frac{\varphi^{V}(0)b^2t^2}{1\cdot 2} + \ldots = \xi(t),$$

ψ et ξ désignant des fonctions arbitraires, on trouvera :

$$\varphi''(0) + \varphi^{IV}(0)bt + \ldots = \frac{d\psi(t)}{b\,dt},$$

$$\varphi'''(0) + \varphi^{V}(0)bt + \ldots = \frac{d\xi(t)}{b\,dt},$$

etc.

Donc, l'expression ci-dessus de z deviendra :

$$z = \psi t + \frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d\psi t}{b\,dt} + \frac{x^4}{1\cdot 2\ldots 4}\frac{d^2\psi t}{b^2dt^2} + \text{etc.,}$$

$$+ x\xi t + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d\xi t}{b\,dt} + \frac{x^5}{1\cdot 2\ldots 5}\frac{d^2\xi t}{b^2dt^2} + \text{etc.}$$

IIme MÉTHODE. (PAR DES SÉRIES D'EXPONENTIELLES).

Les équations aux différentielles partielles auxquelles conduisent ordinairement les problèmes de Physique et de Mécanique sont de la forme linéaire du 2d ordre

$$(1)\quad V = A\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) + B\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right) + C\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + D\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + E\left(\frac{d^2u}{dzdy}\right) + \text{etc.}$$
$$+ F\left(\frac{du}{dt}\right) + G\left(\frac{du}{dz}\right) + K\left(\frac{du}{dy}\right) + H\left(\frac{du}{dx}\right) + Iu = 0,$$

les coëfficients A, B, etc. étant des fonctions de x, y, z, ne contenant point la variable t, et privées d'un dernier terme indépendant de u.

Or, nous savons qu'on peut toujours satisfaire à une telle équation par les valeurs particulières

$$u_0 = E_0 e^{a_0 t},\ u_1 = E_1 e^{a_1 t},\ u_2 = E_2 e^{a_2 t},\ \text{etc.},$$

en nombres infinis, E_0, E_1, E_2, etc., désignant des fonctions arbitraires de x, y, z; donc son intégrale générale sera de la forme

$$u = E_0 e^{a_0 t} + E_1 e^{a_1 t} + E_2 e^{a_2 t} + \text{etc.} = \sum_0^\infty{}_n [E_n e^{a_n t}]. \quad (2)$$

Lorsque la fonction u augmente constamment avec t, les constantes arbitraires $a_0 a_1 a_2$, etc. seront réelles. Mais lorsque les valeurs de u sont périodiques, comme dans les questions relatives aux petites oscillations des points d'un corps élastique, écartés de leur position d'équilibre, alors il faudra poser

$$a_0 = \alpha_0\sqrt{-1},\ a_1 = \alpha_1\sqrt{-1},\ a_2 = \alpha_2\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

et changer les exponentielles imaginaires en valeurs trigonométriques, alors l'expression (2) prendra cette autre forme :

$$u = H_0 \sin \alpha_0 t + H_1 \sin \alpha_1 t + H_2 \sin \alpha_2 t + \text{etc.} +$$
$$K_0 \cos \alpha_0 t + K_1 \cos \alpha_1 t + K_2 \cos \alpha_2 t + \text{etc.}$$
$$= \sum_0^\infty{}_n [H_n \sin \alpha_n t] + \sum_0^\infty{}_n [K_n \cos \alpha_n t]. \quad (3)$$

1°) *Détermination des fonctions* E_n.

En substituant la valeur (2) et ses dérivées partielles du 1er et du 2d ordre dans l'équation (1), l'exponentielle $e^{a_n t}$ deviendra fac-

teur commun, et la proposée sera satisfaite en posant :

$$B\frac{d^2E_n}{dz^n}+C\frac{d^2E_n}{dy^2}+D\frac{d^2E_n}{dx^2}+\text{etc.}+G\frac{dE_n}{dz}+K\frac{dE_n}{dy}+H\frac{dE_n}{dx}$$
$$+(a^2{}_nA+a_nF+I)E_n=0. \qquad (4)$$

En intégrant cette équation on obtient généralement une expression de cette forme

$$E_n=F_n(x,y,z),$$

d'où l'on tire :

$$E_0=F_0(x,y,z),\ E_1=F_1(x,y,z),\ \text{etc.}$$

2°) *Détermination des fonctions* H_n, K_n.

De l'équation (3) on déduit, par la différentiation :

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=\Sigma(\alpha_nH_n\cos\alpha_nt)-\Sigma(\alpha_nK_n\sin\alpha_nt),$$

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)=-\Sigma(\alpha^2{}_nH_n\sin\alpha_nt)-\Sigma(\alpha^2{}_nK_n\cos\alpha_nt),$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)=\Sigma\left[\left(\frac{dH_n}{dz}\right)\sin\alpha_nt\right]+\Sigma\left[\left(\frac{dK_n}{dz}\right)\cos\alpha_nt\right],$$

etc.

$$\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)=\Sigma\left[\left(\frac{d^2H_n}{dz^2}\right)\sin\alpha_nt\right]+\Sigma\left[\left(\frac{d^2K_n}{dz^2}\right)\cos\alpha_nt\right],\ \text{etc.}$$

En substituant ces valeurs dans le 1er membre de l'équation (1), on trouve, en ordonnant par rapport à $\sin\alpha_nt$, et $\cos\alpha_nt$:

$$V=\Sigma\left\{B\left(\frac{d^2H_n}{dz^2}\right)+C\left(\frac{d^2H_n}{dy^2}\right)+\ldots+G\left(\frac{dH_n}{dz}\right)+\ldots+\right.$$
$$\left.IH_n-\alpha^2{}_nAH_n-\alpha_nFK_n\right\}\sin\alpha_nt+$$
$$\Sigma\left\{B\left(\frac{d^2K_n}{dz^2}\right)+C\left(\frac{d^2K_n}{dy^2}\right)+\ldots+G\left(\frac{dK_n}{dz}\right)+\ldots+\right.$$
$$\left.IK_n-\alpha^2{}_nAK_n+\alpha_nFH_n\right\}\cos\alpha_nt.$$

On aura donc $V=0$, en faisant séparément

$$B\left(\frac{d^2H_n}{dz^2}\right)+C\left(\frac{d^2H_n}{dy^2}\right)+\ldots+IH_n-\alpha^2{}_nAH_n-\alpha_nFK_n=0,$$

$$B\left(\frac{d^2K_n}{dz^2}\right)+C\left(\frac{d^2K_n}{dy^2}\right)+\ldots+IK_n-\alpha^2{}_nAK_n+\alpha_nFH_n=0.$$

En intégrant ces équations, on trouve généralement :

$$H_n = F_n(x,y,z)\,,\quad K_n = f_n(x,y,z)\,,$$

d'où :
$$H_0 = F_0(x,y,z),\quad H_1 = F_1(x,y,z)\,,\ \text{etc.}$$
$$K_0 = f_0(x,y,z),\quad K_1 = f_1(x,y,z)\,,\ \text{etc.}$$

Rem. Après avoir déterminé les fonctions E_n, ou les fonctions H_n et K_n, on aura encore à chercher les valeurs des constantes a_0, a_1, etc., α_0, α_1, etc., et de celles introduites par les intégrations ; toutes les constantes se détermineront par les conditions de l'état initial et final du phénomène qui forme l'objet du problème, et par des méthodes d'analyse qui reposent sur ces conditions.

Exemple. Traitons, par le procédé de la 2^de^ Méthode, l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2 \cdot \frac{d^2u}{dx^2}\,.$$

On trouve les deux équations :

$$H_n \alpha^2{}_n + c^2 \cdot \frac{d^2H_n}{dx^2} = 0\,,$$

$$K_n \alpha^2{}_n + c^2 \cdot \frac{d^2K_n}{dx^2} = 0.$$

En intégrant ces équations il vient :

$$K_n = C_n \cos\frac{\alpha_n x}{c} + C'_n \sin\frac{\alpha_n x}{c}\,,$$

$$H_n = D_n \cos\frac{\alpha_n x}{c} + D'_n \sin\frac{\alpha_n x}{c}\,.$$ On a donc

$$u = \sum_0^\infty{}_n \left\{ \left[c_n \cos\frac{\alpha_n x}{c} + C'_n \sin\frac{\alpha_n x}{c} \right] \cos \alpha_n t \right\}$$

$$+ \sum_0^\infty{}_n \left\{ \left[D_n \cos\frac{\alpha_n x}{c} + D'_n \sin\frac{\alpha_n x}{c} \right] \sin \alpha_n t \right\}.$$

Il n'y aura plus qu'à déterminer les constantes α_n, C_n, C'_n, D_n, D'_n.

II^me PARTIE.

—

APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

—

APPLICATIONS ALGÉBRIQUES.

§ 53.

VRAIES VALEURS DES FONCTIONS QUI, POUR DES VALEURS PARTICULIÈRES DES VARIABLES, SE RÉDUISENT A :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

1° VRAIE VALEUR DES EXPRESSIONS DE LA FORME $\frac{0}{0}$.

A.) Fonctions explicites d'une seule variable.

1^er THÉORÈME. *Si la fonction*

$$y = \frac{F(x)}{f(x)},$$

se réduit à $\frac{0}{0}$ *pour* $x = a$, *et que l'expression*

$$\frac{\frac{d^n Fx}{dx^n}}{\frac{d^n fx}{dx^n}} = \frac{F^{(n)}x}{f^{(n)}x},$$

soit la 1^re *qui ne se réduise pas à* $\frac{0}{0}$, *pour* $x = a$, *je dis que la vraie valeur de* y *sera*

$$y = \frac{F^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a)}.$$

Démonst. Car on a :

$$y=\frac{Fx}{fx}=\frac{F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot2\ldots n-1}F^{(n-1)}a+\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}F^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{1.2\ldots n+1}F^{(n+1)}(a+\varepsilon(x-a)}{f(a)+\frac{x-a}{1}f'a+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot2\ldots n-1}f^{(n-1)}a+\frac{(x-a)^n}{1\cdot2\ldots n}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)}{1.2\ldots n+1}f^{(n+1)}(a+\varepsilon(x-a))}.$$

Or, par hypothèse on a en même temps

$$F(a)=0,\ f(a)=0,$$
$$F'(a)=0,\ f'(a)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$F^{(n-1)}(a)=0,\ f^{(n-1)}(a)=0;$$

donc l'expression ci-dessus devient :

$$y=\frac{Fx}{fx}=\frac{F^{(n)}(a)+\frac{(x-a)}{n+1}F^{(n+1)}[a+\varepsilon(x-a)]}{f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)}{n+1}f^{(n+1)}[a+\varepsilon(x-a)]}.$$

Donc pour $x=a$, il vient

$$y=\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{0}{0}=\frac{F^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a)}.$$

1^er^ *Exemple.* Chercher la vraie valeur de la fraction

$$y=\frac{x^5-a^5}{x^3-a^3}=\frac{Fx}{fx},$$

qui devient $\frac{0}{0}$, pour $x=a$.

On a ici :

$$F'x=5x^4,\ f'x=3x^2;$$

pour $x=a$, ces dérivées ne deviennent pas nulles à la fois, on a donc $y=\frac{5a^4}{3a^2}=\frac{5}{3}a^2$.

2^me^ *Exemp.* Si dans $y=\frac{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}$, on fait $x=2$, on obtient $y=\frac{0}{0}$, chercher la vraie valeur de y, correspondant à $x=2$.

On a ici :

$F'x = 4x^3 - 21x^2 + 36x - 20$, pour $x=2$, on a $F'(2)=0$,
$f'x = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4$, » $x=2$, on a $f'(2)=0$,
$F''x = 12x^2 - 42x + 36$, » $x=2$, on a $F''(2)=0$,
$f''x = 12x^2 - 30x + 12$, » $x=2$, on a $f''(2)=0$,
$F'''x = 24x - 42$, » $x=2$, on a $F'''(2)=6$,
$f'''x = 24x - 30$, » $x=2$, on a $f'''(2)=18$,

donc, la valeur cherchée est

$$y = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

3^me^ *Exemp.* Chercher la valeur de $y = \frac{1-\sin x}{(\pi-2x)\cos x}$, qui pour $x = \frac{\pi}{2}$, se réduit à $\frac{0}{0}$.

On a :

$F'x = -\cos x$, donc $F'x(\frac{\pi}{2}) = 0$,

$f'x = -(\pi-2x)\sin x - 2\cos x$, donc $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$,

$F''x = \sin x$, donc $F''(\frac{\pi}{2}) = 1$,

$f''x = -(\pi-2x)\cos x + 2\sin x + 2\sin x$, donc $f''(\frac{\pi}{2}) = 4$,

donc $y = \frac{1}{4}$.

(B) Fonctions implicites.

Soit $u = \varphi(x,y) = 0$, ou $y = \psi x$. On aura :

$$\frac{du}{dx} = (\frac{d\varphi}{dx}) + (\frac{d\varphi}{dy})\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{d\varphi}{dx})}{(\frac{d\varphi}{dy})} = \frac{F(x,y)}{f(x,y)} = \frac{F(x,\psi x)}{f(x,\psi x)}.$$

Supposons que

$F(x,y)=0$, $f(x,y)=0$, pour $x=a$, $y=\psi(a)=b$,

je dis qu'on obtiendra la vraie valeur de $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, si l'on cherche les dérivées par rapport à x des deux fonctions $F(x,y)$, $f(x,y)$, c qu'on y pose $x=a$, $y=\psi a = b$.

Car on a :

$$\frac{F(x,y)}{f(x,y)} = \frac{F(x,\psi x)}{f(x,\psi x)} =$$

$$\frac{F(a,\psi a) + \frac{x-a}{1} F'(a,\psi a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} F''(a,\psi a) + \text{etc.},}{f(a,\psi a) + \frac{x-a}{1} f'(a,\psi a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a,\psi a) + \text{etc.}}$$

Comme on a par hypothèse $F(a,\psi a) = 0$, $f(a,\psi a) = 0$, il vient :

$$\frac{F(x,y)}{f(x,y)} = \frac{F'(a,\psi a) + \frac{x-a}{1.2} F''(a,\psi a) + \ldots}{f'(a,\psi a) + \frac{x-a}{1.2} f''(a,\psi a) + \ldots};$$

donc, pour $x = a$, $y = \psi a = b$, on aura :

$$\frac{F(a,b)}{f(a,b)} = \frac{F'(a,\psi a)}{f'(a,\psi a)}.$$

Il faut donc prendre la dérivée de $F(x,y)$ par rapport à x, ce qui donne $\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$, et diviser par la dérivée de $f(x,y)$, qui est $\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$, ce qui donne

$$\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx}},$$

et chercher ce que devient ce rapport pour $x = a$, $y = \psi a = b$. Le résultat sera la vraie valeur, à moins que cette expression ne se réduise encore à $\frac{0}{0}$. Dans ce cas, il faudrait recourir aux dérivées du second ordre, etc.

1er *Exemple.* y étant fonction de x, tel que pour $x = 0$, on ait $y = 0$, on trouve que la fraction

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax},$$

devient $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$, et $y = 0$.

En prenant les dérivées du numérateur et du dénominateur on a :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\frac{dy}{dx}-2x}{2y\frac{dy}{dx}-a}=0, \text{ ou } \frac{1}{0}, \text{ pour } x=0, y=0.$$

On trouve ces deux valeurs en résolvant $\frac{dy}{dx}=\frac{a\frac{dy}{dx}-2x}{2y\frac{dy}{dx}-a}$ par rapport à $\frac{dy}{dx}$, puis en faisant dans la résultat $x=0, y=0$.

On a, en effet,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a+\sqrt{a^2-4xy}}{2y}=\frac{2a}{0}, \text{ pour } x=0, y=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a-\sqrt{a^2-4xy}}{2y}=\frac{2x}{(a+\sqrt{a^2-4xy}}=\frac{0}{a}=0, \text{ pour } x=0, y=0.$$

2me *Exemp.* De l'équation $ay^3+x^4-bx^2y=0$, on déduit, par la différentiation

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{2bxy-4x^3}{2ay^2-bx^2}. \quad (1)$$

Pour $x=0, y=0$, on a $p=\frac{0}{0}$. Donc, pour trouver la vraie valeur de p, on écrira :

$$p=\frac{\frac{d(2bxy-4x^3)}{dx}}{\frac{d(2ay^2-bx^2)}{dx}}=\frac{bxp+by-12x^2}{3ayp-bx}. \quad (2)$$

Pour $x=0, y=0$, la formule (2) se réduit encore à $p=\frac{0}{0}$; on fera donc de nouveau

$$p=\frac{d(bxp+by-12x^2):dx}{d(3ayp-bx):dx}=\frac{bp+b\frac{dp}{dx}\cdot x+bp-24x}{3ap^2+3ay\frac{dp}{dx}-b}.$$

Cette expression, pour $x=0$, $y=0$, devient :

$$p=\frac{2bp}{3ap^2-b}; \text{ ou } p(p^2-\frac{b}{a})=0.$$

De cette équation on tire $p=0$ et $p=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$; ces trois quantités sont les vraies valeurs de p, donné par la formule (1), quand on y pose $x=0$, $y=0$.

2° VRAIE VALEUR DES EXPRESSIONS DE LA FORME $\frac{0}{0}$.

Soit $y = \frac{Fx}{fx} = \frac{0}{0}$, pour $x = a$; je dis que l'on obtiendra la vraie valeur de y, en cherchant ce que devient le rapport

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{df}{dx}} = \frac{F'x}{f'x},$$

quand on y fait $x = a$.

Car on a

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{\frac{1}{fx}}{\frac{1}{Fx}}.$$

Donc, la vraie valeur de $y = \frac{Fx}{fx} = \frac{0}{0}$ pour $x = a$, sera la valeur de $\frac{\frac{1}{fx}}{\frac{1}{Fx}} = \frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \frac{0}{0}$, pour $x = a$.

Mais cette dernière valeur s'obtiendra, en cherchant ce que devient le rapport

$$\frac{\frac{d(\frac{1}{fx})}{dx}}{\frac{d(\frac{1}{Fx})}{dx}} = \frac{\frac{f'x}{fx^2}}{\frac{F'x}{Fx^2}} = \frac{f'x}{F'x} \cdot \frac{Fx^2}{fx^2},$$

quand on y fait $x = a$; on a donc, pour la vraie valeur, l'égalité

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{f'x}{F'x} \cdot \left(\frac{Fx}{fx}\right)^2, \quad \text{ou}$$

$$1 = \frac{f'x}{F'x} \cdot \frac{Fx}{fx};$$

d'où

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{F'x}{f'x}, \text{ pour } x = a.$$

Si le rapport $\frac{F'x}{f'x}$ se réduisait encore à $\frac{\infty}{\infty}$, ou à $\frac{0}{0}$, pour $x=a$, il faudrait recourir au rapport

$$\frac{F''x}{f''x}$$

des dérivées secondes, etc.

1^er^ *Exemple.* $y=\frac{\log(a+e^x)}{x}$, devient $y=\frac{\infty}{\infty}$ pour $x=\infty$, trouver la vraie valeur de y.

En prenant les dérivées du numérateur et du dénominateur, on a

$$\frac{e^x}{a+e^x}=\frac{1}{1+ae^{-x}}.$$

Or, cette expression devient 1 pour $x=\infty$, donc la vraie valeur de $\frac{\log(a+e^x)}{x}$ (pour $x=\infty$), $=1$.

2^me^ *Exemp.* $y=\frac{\log(1-x)}{\log \operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}$, devient $y=\frac{\infty}{\infty}$, pour $x=1$, trouver la vraie valeur de y.

En prenant les dérivées des deux termes de cette fraction, on a

$$\frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{\pi}{2\cos^2(\frac{\pi x}{2})\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}}=-\frac{\cos^2(\frac{\pi x}{2})\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}{\frac{\pi}{2}(1-x)}=-\frac{\sin(\pi x)}{\pi(1-x)}.$$

Cette expression se réduit à $\frac{0}{0}$ quand on y pose $x=1$, il faut différentier de nouveau les deux termes de cette dernière fraction, ce qui donnera ce nouveau rapport

$$\frac{-\pi\cos(\pi x)}{-\pi}=\cos\pi x.$$

Or, en posant ici $x=1$, on a $\cos\pi=-1$, donc -1 est la vraie valeur de y correspondant à $x=1$.

3° VRAIE VALEUR DES FONCTIONS QUI DEVIENNENT $0.\infty$, POUR $x=a$.

Soit $$y = \mathrm{F}x \cdot fx,$$
et supposons que l'on ait $f(a)=0$, $\mathrm{F}(a)=\infty$, alors en écrivant
$$y = \frac{fx}{\frac{1}{\mathrm{F}x}},$$
on aura, sous cette forme, $y=\frac{0}{0}$; on trouvera alors la vraie valeur de y, à l'aide du rapport
$$\frac{\frac{df x}{dx}}{\frac{d(\frac{1}{\mathrm{F}x})}{dx}},$$
en y faisant $x=a$.

Mais on peut écrire aussi
$$y = \frac{\mathrm{F}x}{\frac{1}{fx}};$$
on aura alors, sous cette forme, $y=\frac{\infty}{\infty}$, pour $x=a$; par conséquent, on trouve aussi la vraie valeur de y, à l'aide du rapport
$$\frac{\frac{d\mathrm{F}x}{dx}}{\frac{d(\frac{1}{fx})}{dx}},$$
en y posant $x=a$.

Exemple. $y=x\log(e^x-1)$, devient $y=0\cdot\infty$, pour $x=0$, qu'elle est la vraie valeur de y?

Écrivons d'abord
$$y = \frac{\log(e^x-1)}{\frac{1}{x}},$$
puis prenons les dérivées des deux termes de cette fraction; on trouve :

$$\frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{x^2e^x}{e^x-1}.$$

Cette fraction devient $\frac{0}{0}$, pour $x=0$, il faut donc prendre de nouveau la dérivée de son numérateur et de son dénominateur, et l'on trouve cette autre fraction

$$-\frac{(x^2+2x)e^x}{e^x} = -x(x+2),$$

qui devient zéro pour $x=0$; donc la vraie valeur cherchée est $y=0$.

4° VRAIE VALEUR DES FONCTIONS QUI DEVIENNENT 0^0.

Soit $y=(Fx)^{fx}$, et snpposons que pour $x=a$, on ait $fa=0$, $Fa=0$, alors on aura $y=0^0$. Pour trouver, dans ce cas, la vraie valeur de y, prenons les logarithmes des deux membres, et écrivons $\log y = fx \cdot \log Fx$.

Il est clair qu'on aura alors

$$\log y = 0\cdot\infty, \text{ pour } x=a.$$

On obtiendra donc la vraie valeur de $\log y$ par l'un des deux rapports

$$\frac{\frac{dfx}{dx}}{\frac{d(\frac{1}{\log Fx})}{dx}}, \text{ ou } \frac{\frac{d\log Fx}{dx}}{\frac{d(\frac{1}{fx})}{dx}}.$$

Soit b cette vraie valeur, alors celle de y sera e^b.

Exemple. $y=\left\{\operatorname{tg} x\right\}^{\frac{a}{\log\sin x}}$, devient 0^0, pour $x=0$. Mais on a :

$$\log y = \frac{a}{\log\sin x}\log(\operatorname{tg} x) = 0\cdot\infty, \text{ pour } x=0;$$

on a ici : $Fx=\operatorname{tg} x$ et $fx=\frac{a}{\log\sin x}$, donc

$$\frac{\frac{d\log Fx}{dx}}{\frac{1}{\quad}} = a\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2 x\operatorname{tg} x}}{\cos x} = \frac{a}{\cos^2 x}.$$

Donc, pour $x=0$, on a $\log y=a$, d'où $y=e^a$.

5° VRAIE VALEUR DES FONCTIONS QUI DEVIENNENT ∞° POUR $x=a$.

Soit $y=Fx^{fx}$ et $Fx=\infty$, $fx=0$, pour $x=a$, alors $y=\infty^\circ$ pour $x=a$.

Prenons les logarithmes des deux membres, on aura ;

$$\log y=fx\cdot\log Fx=0\cdot\infty.$$

On trouve par conséquent la vraie valeur de $\log y$, par l'un des rapports

$$\frac{\frac{d\log Fx}{dx}}{\frac{d(\frac{1}{fx})}{dx}} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{dfx}{dx}}{\frac{d(\frac{1}{\log Fx})}{dx}}.$$

Soit $\log y=b$, cette vraie valeur, on aura, pour celle de y, $y=e^b$.

Exemple. $y=(\frac{1}{1-x})^{\cos(\frac{\pi x}{2})}$ devient ∞° pour $x=1$.

Prenons les logarithmes, on aura :

$$\log y=\cos(\tfrac{\pi x}{2})\log(\tfrac{1}{1-x})=0\cdot\infty \text{ pour } x=1.$$

On a ici $fx=\cos(\frac{\pi x}{2})$, $Fx=\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{fx}=\frac{1}{\cos(\frac{\pi x}{2})}=$ $\sec(\frac{\pi x}{2})$. Donc

$$\frac{\frac{d\log Fx}{dx}}{\frac{d(\frac{1}{fx})}{dx}}=\frac{\frac{d\log(\frac{1}{1-x})}{dx}}{\frac{d\sec(\frac{\pi x}{2})}{dx}}=\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}}=\frac{2}{\pi}\frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1+\cos\pi x}{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}.$$

Donc, pour $x=1$, on a $\log y=\bar{0}$, il faut donc prendre les dérivées des deux termes de cette dernière fraction, et l'on aura :

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{-\pi\sin\pi x}{-\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}(1-x)\cos\frac{\pi x}{2}}.$$

Cette fraction devient zéro pour $x=1$, donc la vraie valeur de $\log y=0$; d'où $y=e^0=1$.

6° VRAIE VALEUR DES FONCTIONS QUI DEVIENNENT 1^∞ POUR $x=a$.

Soient $y=\mathrm{F}x^{\mathrm{f}x}$, $\mathrm{f}x=\infty$, $\mathrm{F}x=1$, pour $x=a$, en prenant les logarithmes, l'expression

$$\log y=\mathrm{f}x\cdot\log\mathrm{F}x \text{ devient } \infty\cdot 0 \text{ pour } x=a;$$

donc la vraie valeur de $\log y$ s'obtiendra par l'un des rapports :

$$\frac{\frac{d\log\mathrm{F}x}{dx}}{\frac{d(\frac{1}{\mathrm{f}x})}{dx}} \text{ ou } \frac{\frac{d\mathrm{f}x}{dx}}{\frac{d(\frac{1}{\log\mathrm{F}x})}{dx}}.$$

Soit $\log y=b$, cette vraie valeur, on aura celle de y par la relation $y=e^b$.

Exemple. $y=x^{\frac{1}{1-x}}$ devient 1^∞ pour $x=1$. En prenant les logarithmes, on a :

$$\log y=\frac{1}{1-x}\log x;$$

on a ici $\mathrm{f}x=\frac{1}{1-x}$, $\mathrm{F}x=x$, donc

$$\frac{\frac{d\log\mathrm{F}x}{dx}}{\frac{d(\frac{1}{\mathrm{f}x})}{dx}}=\frac{\frac{d\log x}{dx}}{\frac{d(1-x)}{dx}}=\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-\frac{1}{x};$$

donc $\log y=-1$, pour $x=1$; donc $y=e^{-1}=\frac{1}{e}$ pour $x=1$.

7° VRAIE VALEUR DES FONCTIONS QUI DEVIENNENT $\infty - \infty$, POUR $x = a$.

Soit $y = Fx - fx = \infty - \infty$, pour $x = a$, on trouvera sa vraie valeur en cherchant celle de e^y, soit b cette dernière, on aura $y = \log b$.

Or, on a :

$$e^y = e^{Fx - fx} = \frac{e^{Fx}}{e^{fx}} = \frac{e^{-fx}}{e^{-Fx}} = e^{Fx} \cdot e^{-fx};$$

donc e^y prendra, pour $x = a$, l'une des formes

$$e^y = \frac{\infty}{\infty}, \quad e^y = \frac{0}{0}, \quad e^y = \infty \cdot 0.$$

On trouve, par conséquent, la vraie valeur e^y, par les procédés qui conduisent à celles des expressions $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$.

Exemple. $y = \dfrac{1}{\log x} - \dfrac{x}{\log x}$, devient $y = \infty - \infty$, pour $x = 1$; pour trouver sa vraie valeur je cherche celle de

$$y = \frac{1 - x}{\log x} = \frac{0}{0}.$$

En différentiant les deux termes de cette fraction, on obtient

$$\frac{-1}{\frac{1}{x}} = -x;$$

donc $y = -1$, est la vraie valeur demandée.

REMARQUE GÉNÉRALE.

Les règles exposées dans ce § supposent que les fonctions Fx, fx puissent se développer par la formule de Maclaurin pour la valeur particulière $x = a$. Lorsque le développement ne peut pas s'effectuer suivant les puissances entières et positives de x, on devra suivre le procédé que je vais indiquer.

Soient $y = \dfrac{Fx}{fx}$, et $Fa = 0$, $fa = 0$; si l'on change x en $x + h$, qu'on fasse $x = a$, $h = 0$, dans $\dfrac{F(x+h)}{f(x+h)}$, il est clair qu'on aura la valeur de y, correspondante à $x = a$. Soit y_a cette valeur de y, on

aura $y_a = \frac{Fa}{fa} = \frac{0}{0}$. Cela posé, développons les fonctions $F(x+h)$, $f(x+h)$ par les méthodes algébriques ou trigonométriques, et supposons, qu'en ordonnant le résultat suivant les exposants croissants de h on obtienne :

$$\frac{F(x+h)}{f(x+h)} = \frac{Fx + A_1h^{a_1} + A_2h^{a_2} + \ldots}{fx + B_1h^{b_1} + B_2h^{b_2} + \ldots}.$$

Mais pour $x = a$, il vient $Fa = 0$, $fa = 0$, on a donc aussi :

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{A_1h^{a_1} + A_2h^{a_2} + \ldots}{B_1h^{b_1} + B_2h^{b_2} + \ldots}.$$

$$= \frac{A_1}{B_1}h^{a_1-b_1} + Mh^{a_2-b_1} + \text{etc.} \qquad (1)$$

1° Soit $a_1 = b_1$, la formule précédente devient :

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{A_1}{B_1} + M \cdot h^{a_2-b_1} + \text{etc.}$$

Donc, pour $h = 0$, on aura :

$$y_a = \frac{A_1}{B_1}.$$

2° Soient $a_1 - b_1 = \alpha$, $\alpha > 0$, la formule (1) deviendra :

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = 0 + \frac{A_1}{B_1}h^{\alpha} + Mh^{a_2-b_1} + \text{etc.}$$

Donc, pour $h = 0$, on aura :

$$y_a = 0.$$

3° Soit $a_1 - b_1 = -\alpha$, la formule (1) deviendra :

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{\frac{A_1}{B_1}}{h^{\alpha}} + Mh^{a_2-b_1} + \text{etc.}$$

Donc, pour $h = 0$, on aura :

$$y_a = \frac{\frac{A_1}{B_1}}{0} = \infty.$$

Le procédé algébrique que je viens d'exposer pour la détermination de la vraie valeur des quantités qui se réduisent à $\frac{0}{0}$ est plus général que la Méthode indiquée au commencement de ce §, et est applicable à tous les cas possibles.

1^er *Exemple.* Soit $y=\frac{x^2-a^2}{x-a}$. Pour $x=a$, il vient $y=\frac{0}{0}$.

Mais on a :

$$\frac{\overline{x+h}^2-a^2}{x+h-a}=\frac{x^2+2xh+h^2-a^2}{x+h-a}.$$

Pour $x=a$ on obtient :

$$\frac{\overline{a+h}^2-a^2}{a+h-a}=2a+h.$$

Donc, pour $h=0$, on a

$$y_a=2a\ ;$$

c'est la vraie valeur cherchée.

2^me *Exemp.* Soit $y=\sqrt[3]{\frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}}=\frac{(x-a)^{\frac{1}{3}}}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}$, on aura $y=\frac{0}{0}$, quand on fera $x=a$. Mais en développant les deux termes de la fraction

$$\frac{(x+h-a)^{\frac{1}{3}}}{(\overline{x+h}^2-a^2)^{\frac{2}{3}}},$$

puis faisant $x=a$, on aura :

$$\frac{-a^{\frac{1}{3}}}{(2ah-h^2)^{\frac{2}{3}}}=-\frac{1}{(4a)^{\frac{1}{3}}h}+\frac{2}{5}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}h^{\frac{1}{3}}+\text{etc.}$$

Donc, pour $h=0$, on aura :

$$y_a=\infty\ ;$$

c'est la vraie valeur de l'expression proposée.

3^me *Exemp.* $y=\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}$, devient $y=\frac{0}{0}$ pour $x=1$.

Mais $\frac{1-(x+h)}{\cot\frac{\pi}{2}(x+h)}$, pour $x=1$, devient :

$$\frac{-h}{\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)}=\frac{h}{\operatorname{tg}\frac{\pi h}{2}}=\frac{h}{\frac{\pi h}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^3h^3}{8}+\ldots}=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{6}\pi^2h^2-\text{etc.}$$

Donc, pour $h=0$, on a $y_a=\frac{2}{\pi}$.

§ 34.

THÉORIE DES MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS.

LEMME 1. a *étant une quantité constante, et* h *désignant une variable pouvant décroître indéfiniment, je dis qu'en faisant abstraction des signes, il sera toujours possible de trouver pour* h *des valeurs propres à satisfaire à l'inégalité*

$$(1) \qquad f(a) > h\psi(a+\varepsilon h),\ 0<\varepsilon<1,$$

et que cette inégalité est d'autant plus vraie, que h *diminue davantage.*

En effet, soit h_n l'une des valeurs de h propre à satisfaire à l'égalité

$$f(a) = h\psi(a+\varepsilon h);$$

il est clair qu'en prenant pour h, des valeurs plus petites que h_n, l'inégalité (1) sera satisfaite pour ces valeurs, et quelle le sera d'autant plus que ces valeurs seront plus petites.

Corollaire 1. Il suit de là qu'en prenant h suffisamment petit le binôme

$$f(a)+h\psi(a+\varepsilon h)$$

sera positif ou négatif, selon que la quantité $f(a)$ sera positive ou négative.

Coroll. 2. Il suit aussi du même Lemme, que les deux binômes

$$+f(a)+h\psi(a+\varepsilon h),$$
$$-f(a)+h\psi(a-\varepsilon h),$$

ne peuvent jamais avoir le même signe, à moins qu'on n'ait

$$f(a)=0.$$

Coroll. 3. Les deux binômes

$$f(a)+h\psi(a+\varepsilon h),$$
$$f(a)-h\psi(a-\varepsilon h),$$

seront ensemble positifs ou négatifs, selon que $f(a)$ sera positif ou négatif.

(A) MAXIMUM ET MINIMUM DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

Si, pour une certaine valeur a de x, la fonction $y = f(x)$, est telle que par des valeurs de h aussi petites que l'on voudra, on ait toujours en même temps

$$\begin{aligned} f(a) &> f(a+h), \\ f(a) &> f(a-h), \end{aligned} \qquad (a)$$

alors la quantité $f(a)$ surpassera toutes les valeurs voisines de cette fonction et sera un *maximum*.

Mais si l'on avait, au contraire,

$$\begin{aligned} f(a) &< f(a+h), \\ f(a) &< f(a-h), \end{aligned} \qquad (b)$$

cette fonction $f(a)$ serait alors moindre que toutes ses valeurs voisines et serait un *minimum*.

Nous pouvons encore donner aux conditions précédentes du maximum et du minimum les formes suivantes :

$f(a)$ sera un maximum, quand on aura en même temps

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &< 0, \\ f(a-h) - f(a) &< 0, \end{aligned}$$

et par conséquent aussi, quand on aura en même temps

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h^2} < 0, \qquad \frac{f(a-h) - f(a)}{h^2} < 0.$$

$f(a)$ sera un minimum, quand on aura

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &> 0, \\ f(a-h) - f(a) &> 0; \end{aligned}$$

donc aussi, quand on aura :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h^2} > 0, \qquad \frac{f(a-h) - f(a)}{h^2} > 0.$$

2^me^ THÉOR. *Soit* $y=fx$, *une fonction telle que pour* $x=a$, *toutes les dérivées de* fx, *jusqu'à celle de l'ordre* $2n-2$, *inclusivement disparaissent, je dis :*

1° *pour que* $f(a)$ *puisse être un maximum ou un minimum. la condition*

$$f^{(2n-1)}(a)=0$$

doit être remplie ;

2° *cette condition étant supposée remplie, la fonction* $f(a)$ *sera un maximum quand on aura*

$$f^{(2n)}(a)<0\,;$$

elle sera, au contraire, un minimum, quand on aura

$$f^{(2n)}(a)>0.$$

Démonstration. On a, par la formule de Taylor :

$$f(a+h)=fa+f'a.h+\text{etc.}+$$
$$f^{(2n-2)}a.\frac{h^{2n-2}}{1\ldots 2n-2}+f^{(2n-1)}a.\frac{h^{2n-1}}{1\ldots 2n-1}+\frac{h^{2n}}{1\ldots 2n}f^{(2n)}(a+\varepsilon h),$$

$$f(a-h)=fa-f'a.h+\text{etc.}+$$
$$f^{(2n-2)}a.\frac{h^{2n-2}}{1\ldots 2n-2}-f^{(2n-1)}a.\frac{h^{2n-1}}{1\ldots 2n-1}+\frac{h^{2n}}{1\ldots 2n}f^{(2n)}(a-\varepsilon h).$$

Mais par hypothèse on a :

$$f'a=0,\ f''a=0,\ \ldots\ f^{(2n-2)}a=0,$$

donc les relations précédentes pourront se mettre sous les formes

$$\frac{f(a+h)-fa}{h^{2n-1}}=\frac{1}{1\ldots 2n-1}f^{(2n-1)}a+\frac{h}{1\ldots 2n}f^{(2n)}(a+\varepsilon h),$$

$$\frac{f(a-h)-fa}{h^{2n-1}}=-\frac{1}{1.2\ldots n-1}f^{(2n-1)}a+\frac{h}{1\ldots 2n}f^{(2n)}(a-\varepsilon h).$$

Mais pour qu'il y fait maximum ou minimum, les premiers membres de ces équations doivent avoir le même signe. Donc les deux binômes qui constituent leurs seconds membres doivent avoir le même signe, on a donc, en vertu du *coroll.* 2,

$$f^{(2n-1)}a=0,$$

pour la condition générique du maximum ou du minimum.

Les conditions précédentes étant supposées remplies, on pourra donner aux deux relations ci-dessus cette autre forme :

$$\frac{f(a+h)-fa}{h^{2n}}=\frac{1}{1\ldots 2n}f^{(2n)}(a)+\frac{h}{1\ldots 2n+1}f^{(2n+1)}(a+\varepsilon h),$$

$$\frac{f(a-h)-fa}{h^{2n}}=\frac{1}{1\ldots 2n}f^{(2n)}(a)-\frac{h}{1\ldots 2n+1}f^{(2n+1)}a-\varepsilon h).$$

Pour le maximum, il faut que les deux premiers membres soient négatifs, donc les deux binômes qui constituent les seconds membres de ces égalités, doivent être négatifs quelque petit que soit h, donc, en vertu du 3^me^ *coroll.*, on doit avoir

$$f^{(2n)}(a)<0.$$

Dans le cas du minimum les premiers membres étant au contraire positifs, il devra en être de même à l'égard des seconds membres, ce qui, par le 3^me^ *coroll.*, exige que l'on ait

$$f^{(2n)}(a)>0.$$

Coroll. 1. Si $n=1$, on a les conditions suivantes :

1° Pour que fa soit un maximum ou un minimum, on doit avoir $f'(a)=0$;

2° Cette condition étant remplie, le maximum aura lieu quand la condition

$$f''(a)<0$$

sera remplie. Au contraire, le minimum exigera que l'on ait

$$f''(a)>0.$$

Coroll. 2. Si $n=2$, il faut que l'on ait $f'''(a)=0$ pour qu'il y ait maximum ou minimum; le maximum exige alors qu'on ait $f^{iv}a<0$, et le minimum $f^{iv}a>0$.

Coroll. 3. Le théorème précédent conduit à la règle suivante : pour trouver le maximum ou le minimum d'une fonction $y=fx$, à une seule variable,

Il faut 1° résoudre l'équation

$$f'(x)=0,$$

Soit $x=a$ l'une de ses racines,

2° Substituer ces valeurs dans la quantité

$$f''(x)$$

alors si l'on trouve $f''a<0$, la quantité fa sera un maximum; si l'on trouve $f''a>0$, alors fa sera un minimum.

Mais si l'on trouve $f''a=0$, il faudra

3° Substituer a dans les deux fonctions

$$f'''x \text{ et } f^{iv}x;$$

la 1re, savoir : $f'''a$ doit s'évanouir, pour qu'il y ait maximum ou minimum; la 2de, savoir : $f^{IV}a$, doit être négatif dans le cas du maximum, et positif pour le minimum.

Si l'on avait $f^{IV}a = 0$, il faudrait recourir aux dérivées suivantes

$$f^{V} \text{ et } f^{VI}, \text{ etc.}$$

Remarque. Si $x=a$, rendait $f'a=\frac{1}{0}$, il faudrait, pour distinguer le maximum du minimum, recourir aux conditions

$$f(a\pm h) < fa \quad \text{pour le maximum,}$$

et

$$f(a\pm h) > fa \quad \text{pour le minimum.}$$

Soit, par exemple, $fx=b+(x-a)^{\frac{4}{3}}$,

$$f'x=\tfrac{4}{3}(x-a)^{\frac{1}{3}},$$

$$f''x=\frac{4}{9(x-a)^{\frac{2}{3}}};$$

$f'x=\frac{4}{3}(x-a)^{\frac{1}{3}}=0$, donne $x=a$, donc $f''a=\frac{1}{0}$, $f''a=\frac{1}{0}$, etc. Mais on a

$$f(a+h)=b+h^{\frac{4}{3}} > b=fa,$$

$$f(a-h)=b+h^{\frac{4}{3}} > b=fa;$$

donc $f(a)=b$ est un minimum.

Donnons quelques exemples pour servir d'application à la règle pour la recherche du maximum et du minimum.

1er *Exemple.* Soit $y=fx=ax-x^2$, on aura :

$$f'x=a-2x,\ f''x=-2.$$

$f'x=0$ ou $a-2x=0$ donne $x=\frac{a}{2}$, donc

$y=a\cdot\frac{a}{2}-(\frac{a}{2})^2=\frac{1}{4}a^2$ est un maximum.

2me *Exemp.* Soit $y=fx=x^4+2x^2+3$; d'où :

$$f'x=4x^3+4x,$$

$$f''x=12x^2+4.$$

$f'x=0$ ou $4x^3+4x=0$ donne $x=0$, $x=\sqrt{-1}$, $x=-\sqrt{-1}$.

1° Pour $x=0$, on a $f''x=4$, donc $y=3$ est un minimum.

2° Pour $x=\sqrt{-1}$, on a $f''x=-8$, donc

$y=(\sqrt{-1})^4+2(\sqrt{-1})^2+3=2$ est un maximum.

3° Pour $x=-\sqrt{-1}$, on a $f''x=-8$, donc

$$y=(-\sqrt{-1})^4+2(-\sqrt{-1})^2+3=2 \text{ est un maxim.}$$

3^me *Exemp.* Soit $y=fx=x^5-5ax^4+5a^2x^3+a^5$, on aura :

$$f'x=5x^4-20ax^3+15a^2x^2,$$
$$f''x=20x^3-60ax^2+30a^2x,$$
$$f'''x=60x^2-120ax+30a^2,$$
$$f^{IV}x=120x-120a,$$
$$f^{V}x=120.$$

$f'x=0$ ou $5x^4-20ax^3+15a^2x^2=x^2(x^2-4ax+3a^2)=0$, donne $x=0$, $x=0$, $x=a$, $x=3a$.

1° Pour $x=0$ on a $f''x=0$, $f'''x=30a^2$, donc

$x=0$ ne rend y ni un maxim. ni un minim.

2° Pour $x=a$ on a $f''x=-10a^3$, donc

$y=(a^5-5a^5+5a^5+a^5)=2a^5$ est un maxim.

3° Pour $x=3a$ on a $f''x=90a^3$, donc

$y=(3a)^5-5a(3a)^4+5a^2(3a)^3+a^5=-26a^5$ est un minim.

4^me *Exemp.* Soit $y=fx=x^x$, on aura :

$$f'x=x^x(1+\log x),$$
$$f''x=x^x\left\{\frac{1}{x}+(1+\log x)^2\right\}.$$

$f'x=0$ ou $x^x(1+\log x)=0$ donne $x^x=0$, $1+\log x=0$.

1° Pour $x^x=0$ on a $f''x=0$, $f'''x=0$, etc., donc y ne devient ni maxim. ni minim.

2° $1+\log x=0$ donne $x=\frac{1}{e}$, donc $f''x=(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}-1}$, donc

$$y=(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} \text{ est un mini.}$$

5^me *Exemp.* Soit $y=fx=e^x\cos 2x$, on aura :

$$f'x=e\ (\cos 2x-2\sin 2x),$$
$$f''x=-e^x(4\sin 2x+3\cos 2x);$$

$f'x=0$ ou $e\ (\cos 2x-2\sin 2x)=0$ donne $e^x=0$, $\cos 2x-2\sin 2x=0$.

1° Pour $e^x=0$ on a $f''x=0$, $f'''x=0$, etc., donc y ne devient, pour cette valeur, ni maxim. ni minim.

2° Pour $\cos 2x - 2\sin 2x = 0$ on a $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{2}$, donc

$$\sin 2x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos 2x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3° Si l'on prend les signes supérieurs, l'on verra que $f''x$ sera négatif, et si l'on prend les signes inférieurs, $f''x$ sera positif.

Donc y devient un maxim. pour les valeurs de x, données par les équations

$$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos 2x = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

et un minimum pour les valeurs

$$\sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos 2x = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

6^me^ *Exemp.* Quelle doit être la hauteur et le rayon de la base d'un vase cylindrique d'une capacité donnée D, pour que la surface totale s soit un minimum.

Soient z le rayon de la base, x la hauteur cherchée, on aura

$$D = z^2\pi \cdot x, \quad S = z^2\pi + 2xz\pi = z^2\pi + \frac{2D}{z}. \quad \text{Mais}$$

$$\frac{dS}{dz} = 0 \quad \text{donne} \quad 2z\pi - \frac{2D}{z^2} = 0; \quad \text{d'où}$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{D}{\pi}}; \quad \text{donc} \quad x = \frac{D}{\pi z^2} = \sqrt[3]{\frac{D}{\pi}}.$$

(B) MAXIMUM ET MINIMUM DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

h et k étant des quantités quelconques pouvant décroître indéfiniment, on dit qu'une fonction

$$z = f(x,y)$$

devient un maximum pour $x=a, y=b$, lorsque pour ces valeurs de x et de y on a constamment

$$\begin{aligned} f(x,y) &> f(x+h, y+k), \\ &> f(x+h, y-k), \\ &> f(x-h, y+k), \\ &> f(x-h, y-k); \end{aligned}$$

et devient un minimum, quand on a, en même temps

$$\begin{aligned} f(x,y) &< f(x+h, y+k), \\ &< f(x+h, y-k), \\ &< f(x-h, y+k), \\ &< f(x-h, y-k), \end{aligned}$$

quelques petits que soient les accroissements h et k. Donc, plus généralement :

z sera un maximum pour $x=a$, $y=b$,

quand pour les valeurs de h et k aussi petites que l'on voudra, les inégalités suivantes :

$$\frac{f(x+h, y+k)-f(x,y)}{h^2} < 0,$$

$$\frac{f(x+h, y-k)-f(x,y)}{h^2} < 0,$$

$$\frac{f(x-h, y+k)-f(x,y)}{h^2} < 0,$$

$$\frac{f(x-h, y-k)-f(x,y)}{h^2} < 0,$$

ont lieu ensemble. Si les premiers membres de ces mêmes inégalités sont constamment >0, alors elles constituent les conditions du minimum de z. L'on voit par là que ces quatre quantités doivent être de même signe pour qu'un maximum ou un minimum soit possible.

LEMME 2. *x désignant une valeur numérique, pour que l'on ait constamment, quelque soit* x,

$$Ax^2 + 2Bx + C > 0,$$
$$Ax^2 - 2Bx + C > 0,$$

il faut que les coëfficients A, B, C, *satisfassent à la relation*

$$B^2 - AC < 0.$$

Car on a :

$$Ax^2 + 2Bx + C = [\sqrt{A} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A}}]^2 + C - \frac{B^2}{A},$$

$$Ax^2 - 2Bx + C = [-\sqrt{A} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A}}]^2 + C - \frac{B^2}{A};$$

d'où l'on voit que les premiers membres de ces égalités seront toujours positifs quand on a

$$C - \frac{B^2}{A} > 0 \quad \text{ou} \quad B^2 - AC < 0.$$

3^me^ Théor. *Les valeurs de* x *et de* y *propres à rendre* $z = f(x,y)$ *un maximum ou un minimum, sont celles que l'on déduit des équations*

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Démonstration. En ne considérant que les termes du 1^er^ ordre, le développement de $z = f(x,y)$ est

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(\frac{df}{dx}\right)h + \left(\frac{df}{dy}\right)k + \frac{1}{1\cdot 2}\left\{\frac{d^2f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k)}{d(x+\varepsilon h)^2}\cdot h^2 + 2hk\frac{d^2f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k)}{d(x+\varepsilon h)d(y+2k)} + \frac{d^3f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k)}{d(y+\varepsilon k)^2}k^2\right\}.$$

En faisant $\frac{k}{h} = \omega$, on peut supposer ω constant, car k et h variant arbitrairement, on peut admettre que ces quantités varient de telle sorte que leur rapport ne change pas.

Posons de plus, pour abréger

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[\frac{d^2f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k)}{d(x+\varepsilon h)^2} + 2\omega\frac{d^2f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k)}{d(x+\varepsilon h)d(y+\varepsilon k)} + \frac{d^2f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k)}{d(y+\varepsilon k)^2}\right] = R_1,$$

expression dans laquelle on a $0 < \varepsilon < 1$,

on aura :

$$\frac{f(x+h, y+k) - f(x,y)}{h} = +\left[\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right)\omega\right] + hR_1;$$

on trouvera de même

$$\frac{f(x+h, y-k) - f(x,y)}{h} = +\left[\left(\frac{df}{dx}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\omega\right] + hR_2,$$

$$\frac{f(x-h,y+k)-f(x,y)}{h}=-[(\frac{df}{dx})-(\frac{df}{dy})\omega]+hR_3,$$

$$\frac{f(x-h,y-k)-f(x,y)}{h}=-[(\frac{df}{dx})+(\frac{df}{dy})\omega]+hR_4.$$

Or, le maximum ou le minimum de $z=f(x,y)$ exigent que les premiers membres de ces quatre égalités soient constamment de même signe, il faut donc, qu'en vertu du 2^me^ Coroll. du Lemme 1, on ait :

$$(\frac{df}{dx})\pm(\frac{df}{dy})\omega=0.$$

Comme ω est indéterminé, cette relation ne pourra subsister que quand on aura en même temps

$$(\frac{df}{dx})=(\frac{dz}{dx})=0,\quad (\frac{df}{dy})=(\frac{dz}{dy})=0. \qquad (1)$$

4^me^ Théor. *La relation*

$$(\frac{d^2z}{dxdy})^2-(\frac{d^2z}{dx^2})(\frac{d^2z}{dy^2})<0,$$

étant remplie pour un couple de valeurs correspondantes $x=a$, $y=b$, *déduites des équations* (1), *je dis que la fonction* $z=f(x,y)$ *sera un maximum pour ces valeurs, quand l'une des relations suivantes*

$$(\frac{d^2z}{dx^2})<0 \quad \text{ou} \quad (\frac{d^2z}{dy^2})<0,$$

sera satisfaite; tandis que z *deviendra un minimum, quand on aura*

$$(\frac{d^2z}{dx^2})>0 \quad \text{ou} \quad (\frac{d^2z}{dy^2})>0.$$

Démonstration. En n'ayant égard qu'aux termes des deux premiers ordres, le développement de $z=f(x,y)$, d'après la formule de Taylor, sera

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=(\frac{dz}{dx})h+(\frac{dz}{dy})k+$$

$$\frac{1}{1\cdot2}\left\{(\frac{d^2z}{dx^2})h^2+2hk(\frac{d^2z}{dxdy})+k^2(\frac{d^2z}{dy^2})\right\}+$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left\{\frac{d^3f(x+\varepsilon h,y+\varepsilon k)}{d(x+\varepsilon h)^3}h^3+3h^2k\frac{d^3f(x+\varepsilon h,y+\varepsilon k)}{d(x+\varepsilon h)^2\,d(y+\varepsilon k)}\right.$$

$$+ 3hk^2\frac{d^3f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k)}{d(x+\varepsilon h)\,d(y+\varepsilon k)^2} + k^3\frac{d^3f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k)}{d(y+\varepsilon k)^3}\Big\}.$$

Mais en supposant que les relations $(\frac{dz}{dx}) = 0, (\frac{dz}{dy}) = 0$, soient satisfaites, puis en posant pour abréger

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\Big\{\frac{d^3f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k)}{d(x+\varepsilon h)^3} + 3\omega\frac{d^3f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k)}{d(x+\varepsilon h)^2 d(y+\varepsilon k)}$$

$$+ 3\omega^2\frac{d^3f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k)}{d(x+\varepsilon h)\,d(y+\varepsilon k)^2} + \omega^3\frac{d^3f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k)}{d(y+\varepsilon k)^3}\Big\} = \mathrm{R}',$$

l'égalité précédente deviendra :

$$\frac{f(x+h, y+k)-f(x,y)}{h^2} = \frac{1}{1\cdot 2}\Big\{(\frac{d^2z}{dx^2}) + 2(\frac{d^2z}{dxdy})\omega + (\frac{d^2z}{dy^2})\omega^2\Big\} + h\mathrm{R}'_1.$$

On aura de même :

$$\frac{f(x+h, y-k)-f(x,y)}{h^2} = \frac{1}{1\cdot 2}\Big\{(\frac{d^2z}{dx^2}) - 2(\frac{d^2z}{dxdy})\omega + (\frac{d^2z}{dy^2})\omega^2\Big\} + h\mathrm{R}'_2,$$

$$\frac{f(x-h, y+k)-f(x,y)}{h^2} = \frac{1}{1\cdot 2}\Big\{(\frac{d^2z}{dx^2}) - 2(\frac{d^2z}{dxdy})\omega + (\frac{d^2z}{dy^2})\omega^2\Big\} + h\mathrm{R}'_3,$$

$$\frac{f(x-h, y-k)-f(x,y)}{h^2} = \frac{1\cdot 2}{1}\Big\{(\frac{d^2z}{dx^2}) + 2(\frac{d^2z}{dxdy})\omega + (\frac{d^2z}{dy^2})\omega^2\Big\} + h\mathrm{R}'_4.$$

Cela posé 1° en regardant $(\frac{d^2z}{dx^2})$, $(\frac{d^2z}{dy^2})$ comme positifs, les deux trinômes

$$\mathrm{L} = (\frac{d^2z}{dx^2}) + 2(\frac{d^2z}{dxdy})\omega + (\frac{d^2z}{dy^2})\omega^2,$$

$$\mathrm{G} = (\frac{d^2z}{dx^2}) - 2(\frac{d^2z}{dxdy})\omega + (\frac{d^2z}{dy^2})\omega^2,$$

seront, en vertu du 2^me^ lemme, toujours positifs, quelque soit ω, quand on aura

$$(2) \qquad \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - \left(\frac{d^2z}{d^2x}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) < 0.$$

Cette relation exige de plus que $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ et $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ soient constamment de même signe.

2° Supposons maintenant que $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ et par conséquent $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ soient négatifs, alors les relations ci-dessus deviennent :

$$\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)}{h^2} = -\frac{1}{1\cdot 2}\mathrm{L} + h\mathrm{R}'_1,$$

$$\frac{f(x+h,y-k)-f(x,y)}{h^2} = -\frac{1}{1\cdot 2}\mathrm{G} + h\mathrm{R}'_2,$$

$$\frac{f(x-h,y+k)-f(x,y)}{h^2} = -\frac{1}{1\cdot 2}\mathrm{G} + h\mathrm{R}'_3,$$

$$\frac{f(x-h,y-k)-f(x,y)}{h^2} = -\frac{1}{1\cdot 2}\mathrm{L} + h\mathrm{R}'_4.$$

L et G à cause de la relation (2) étant positifs, il suit du 3^me^ coroll. du 1^er^ lemme que les seconds membres des équations précédentes seront négatifs, donc les premiers membres le seront pareillement, et par conséquent il y a maximum.

3° Supposons que $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ et par conséquent $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ soient positifs, on aura les égalités

$$\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)}{h^2} = +\frac{1}{1\cdot 2}\mathrm{L} + h\mathrm{R}'_1,$$

$$\frac{f(x+h,y-k)-f(x,y)}{h^2} = +\frac{1}{1\cdot 2}\mathrm{G} + h\mathrm{R}'_2,$$

$$\frac{f(x-h,y+k)-f(x,y)}{h^2} = +\frac{1}{1\cdot 2}\mathrm{G} + h\mathrm{R}'_3,$$

$$\frac{f(x-h,y-k)-f(x,y)}{h^2} = +\frac{1}{1\cdot 2}\mathrm{L} + h\mathrm{R}'_4,$$

desquelles on conclut que les premiers membres sont positifs, et qu'il y a par conséquent minimum.

1^er *Exemple.* Soit $z = x^2 + xy + y^2 - ax - by$, on aura :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 2x + y - a = 0,$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = x + 2y - b = 0.$$

De ces équations on tire :

$$x = \tfrac{1}{3}(2a - b),\ y = \tfrac{1}{3}(2b - a).$$

Mais on a :

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = 2,\quad \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = 1,\quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = 2,$$

donc la condition

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = 1 - 4 = -3 < 0$$

est satisfaite. On a de plus

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) > 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) > 0, \quad \text{donc}$$

$z = -\frac{1}{3}(a^2 - ab + b^2)$ est un minimum.

2^me *Exemp.* Soit $z = \frac{1}{2}xy + (a - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.

On trouve :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \tfrac{1}{3}a - \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{12}y = 0,$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{2}y = 0,$$

d'où $x = \frac{21}{47}a,\quad y = \frac{80}{47}a.$

Comme on a ensuite

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = -\tfrac{2}{3} < 0,\quad \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = -\tfrac{1}{12},\quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = -\tfrac{1}{2} < 0,$$

et $$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = -\frac{47}{144} < 0;$$

il suit que $z = \frac{6}{47}a^2$ est un maximum.

3^me *Exemp.* De tous les triangles isopérimètres chercher celui qui renferme la plus grande surface.

Soient x, y, z les trois côtés du triangle; posons $2p = x+y+z$, nommons S la surface demandée, on aura l'équation

$$S = \sqrt{\{p(p-x)(p-y)(p-z)\}}$$

$$= \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)} = \text{maxim.}$$

On a ici les équations :

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dS}{dy}\right) = 0,$$

ou

$$p(p-y)(2p-2x-y) = 0,$$

$$p(p-x)(2p-2y-x) = 0.$$

On ne peut poser $p-y=0$, ni $p-x=0$, car alors on aurait

$$2p = 2y = x+y+z, \quad y = x+z$$

$$2p = 2x = x+y+z, \quad x = y+z \quad \text{absurde.}$$

Donc on a seulement

$$2p-2x-y=0, \quad 2p-2y-x=0.$$

D'où : $x = y = \frac{2}{5}p, \quad z = 2p-x-y = \frac{2}{5}p.$

Au reste, pour ces valeurs de x et de y on a :

$$\left(\frac{d^2S}{dx^2}\right) = -\sqrt{3}, \quad \left(\frac{d^2S}{dy^2}\right) = -\sqrt{3}, \quad \left(\frac{d^2S}{dxdy}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

donc la condition

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2 - \left(\frac{d^2S}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2S}{dy^2}\right) = -\frac{9}{4} < 0,$$

est satisfaite.

4^me *Exemp.* De tous les parallélipipèdes droits inscrits dans une sphère, trouver celui dont le volume est le plus grand.

Soient d le diamètre de la sphère, x, y, z les arêtes du parallélipipède, on aura l'équation

$$V = xyz = xy\sqrt{d^2-x^2-y^2} = \text{maxim.}$$

On a ensuite

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = y\sqrt{d^2-x^2-y^2} - \frac{x^2y}{\sqrt{d^2-x^2-y^2}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{d^2-x^2-y^2}}(d^2-2x^2-y^2),$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{x}{\sqrt{d^2-x^2-y^2}}(d^2-2y^2-x^2).$$

On a donc les équations

$$d^2-2x^2-y^2=0,\quad d^2-2y^2-x^2=0\,;\qquad (\alpha$$

d'où :

$$z=y=z=\frac{d}{\sqrt{3}}.$$

En ayant égard aux équations (α, on trouve de plus

$$\left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)=-\frac{2d}{\sqrt{3}},\ \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)=-\frac{4d}{\sqrt{3}},\ \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)=-\frac{4d}{\sqrt{3}},$$

$$\left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)^2-\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)=-\frac{12d^2}{3}<0.$$

Rem. générale. Soit $z=f(x,y\ldots w)$, on prouve facilement comme ci-dessus, que les valeurs de $x, y\ldots w$, qui rendent z un maximum ou un minimum, s'obtiennent par la résolution des équations

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,\ \left(\frac{dz}{dy}\right)=0,\ldots\left(\frac{dz}{dw}\right)=0.$$

(C.) MAXIMUM ET MINIMUM DES FONCTIONS IMPLICITES.

1^er^ PROBLÈME. y *étant une fonction implicite de* x, *donnée par l'équation*

$$u=f(x,y)=0,$$

trouver les conditions du maximum et du minimum de cette fonction.

Solution. En différentiant la proposée, on trouve

$$\frac{df}{dx}+\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=0;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right)}.$$

Donc comme $\frac{dy}{dx}=0$ est la condition du maximum et du minimum, on en conclut que l'une des relations

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=0\quad\text{ou}\quad\left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0}$$

doit être satisfaite, pour qu'il y ait maximum ou minimum.

En prenant la dérivée du second ordre de l'équation proposée, on obtient :

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)+2\,\frac{d^2f}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0\,;$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\left(\frac{df}{dy}\right)^2-2\,\frac{d^2f}{dxdy}\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)\left(\frac{df}{dx}\right)^2}{\left(\frac{df}{dy}\right)^3}\,.$$

Donc y sera un maximum ou un minimum, selon que cette expression sera négative ou positive.

Exemple. Chercher la valeur de x qui rend y un maximum ou un minimum, quand on a la relation

$$(x-a)^2+(y-b)^2-c^2=0.$$

On a ici :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=2(x-a)=0\,,\quad \text{d'où}\quad x=a\,,\quad \text{donc}\quad y=b\pm c.$$

Comme on a :

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)=2,\ \left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)=0,\ \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)=2\,,$$

on obtient

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(y-b)^2+1}{(y-b)^3}\,;$$

donc 1° pour $y=b+c$ on a $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{c^2+1}{c^3}<0$;

donc $y=b+c$ est un maximum.

2° pour $y=b-c$ on a $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{c^2+1}{c^3}>0$;

donc $y=b-c$ est un minimum.

(D.) MAXIMUM ET MINIMUM DES FONCTIONS DE VARIABLES DÉPENDANTES.

1er PROBLÈME. *Chercher les conditions du maximum et du minimum de la fonction*

$$z = f(x, y), \qquad (1$$

quand y *est une variable dépendante, donnée par la relation*

$$u = \varphi(x, y) = 0. \qquad (2$$

Solution. Comme z est une fonction de x, la condition du maximum, aussi bien que celle du minimum sera

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (3$$

Mais l'équation (2 donne :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = 0; \quad \text{d'où}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}. \qquad (4$$

Par là l'équation (3 se change en celle-ci :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) - \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = 0. \qquad (5$$

Cette équation, jointe à la proposée

$$u = 0,$$

serviront à déterminer les valeurs de x et de y, propres à rendre z un maximum ou un minimum.

Pour le maximum il faut de plus que l'on ait

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} < 0; \qquad (6$$

et pour le minimum il faut que l'on ait

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} > 0. \qquad (7$$

Il faut de plus substituer dans les relations (6 et (7 pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur (4, et pour $\frac{d^2y}{dx^2}$ sa valeur tirée de l'équation

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

après avoir remplacé $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur (4.

Exemple. On demande les valeurs de x et de y qui rendent

$$z=ax+by \qquad (1$$

un maximum ou un minimum, lorsqu'on a, en outre, l'équation

$$u=x^2+y^2-r^2=0. \qquad (2$$

On a ici : $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, donc

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}=a-b\frac{x}{y}=0;$$

et comme $x^2+y^2=r^2$,

on trouve $x=\pm\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\pm\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Mais on a par (2, en différentiant deux fois :

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}=0, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{r^2}{y^3}.$$

Comme on a d'un autre côté :

$$\frac{d^2z}{dx^2}=b\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{on trouve} \quad \frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{br^2}{y^3}.$$

Donc 1° : En prenant

$$x=\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y=\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

on a $$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{b^2r}<0;$$

donc $$z=\frac{(a^2+b^2)r}{\sqrt{a^2+b^2}}=r\sqrt{a^2+b^2}$$ est un maximum.

2° En prenant

$$x=\frac{-ar}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y=\frac{-br}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

on a $$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{(a^2+b^2\sqrt{a^2+b^2}}{b^2r} > 0;$$

donc $z = -r\sqrt{a^2+b^2}$ est un minimum.

§ 52.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

(a). THÉORIE.

Notations et définitions. Pour indiquer la valeur que prend une fonction $\varphi(n)$, de la variable n, quand n devient $\frac{1}{0}$, nous écrirons :

$$[\varphi(n)]_{n=\frac{1}{0}}.$$

Si dans la formule particulière de Maclaurin

$$fx = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{1\ldots n-1} + R_n$$

on a : $$[R_n]_{n=\frac{1}{0}} = 0,$$

le second membre se composera d'une infinité de termes, et le polynome infini

$$fx = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \text{etc.},$$

représentera le type du développement en série d'une fonction fx, d'une variable x, suivant les puissances ascendantes et positives de la variable x.

En faisant, pour abréger,

$$f(0) = A_0,\ \frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot 2\ldots n} = A_n,$$

la série précédente peut aussi s'écrire ainsi :

$$f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \text{etc.}$$

Nous avons déjà vu que la série de Maclaurin exige qu'aucune des fonctions consécutives

$$fx,\ f'x,\ f''x,\ f'''x,\ \text{etc., à l'infini,}$$

ne prenne une valeur de la forme $\frac{1}{0}$, pendant que x varie d'une manière continue, depuis $x=0$ jusqu'à $x=x$. Cette condition

exclut les fonctions qui ne peuvent pas être développées en séries procédant suivant les puissances ascendantes entières et positives de la variable x.

De plus, les fonctions qui satisfont à la condition ci-dessus, ne donneront de séries convergentes que pour des valeurs de la variable x, comprises entre certaines limites, telles que $\alpha < x < \beta$. Nous écrirons toujours, au-dessous de la série, les limites de la variable x entre lesquelles la série existe, et en dehors desquelles elle ne peut plus servir pour les évaluations numériques.

Exemple. La notation

$$fx = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \text{etc.}$$
$$\alpha < x < \beta,$$

exprime que la série n'est convergente que pour des valeurs de x comprises entre les limites α et β.

Lorsque la fonction à développer a la forme fractionnaire

$$\varphi x = \frac{Fx}{fx} = \varphi 0 + \varphi'(0)x + \varphi''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \varphi^{(n)}(0)\cdot\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n} + \text{etc.}$$

Il faut, pour former les coëfficients consécutifs

$$\varphi(0),\ \varphi'(0),\ \varphi''(0),\ \text{etc.},$$

recourir à l'équation

$$\varphi x \cdot fx = Fx,$$

dont la dérivée n^e est :

$$\varphi^{(n)}x\cdot fx + n\varphi^{(n-1)}x\cdot f'x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\varphi^{(n-2)}x\cdot f''x + \text{etc.} + \varphi x\cdot f^{(n)}x = F^{(n)}x,$$

d'où l'on tire :

$$\varphi^{(n)}x = \frac{F^{(n)}x}{fx} - \frac{1}{fx}\left\{ n\varphi^{(n-1)}x\cdot f'x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\varphi^{(n-2)}x\cdot f''x + \text{etc.} + \varphi x\cdot f^{(n)}x \right\}.$$

Si l'on pose $n=1,2,3$, etc. et $x=0$, on a d'abord

$$(a)\quad\left\{\begin{array}{l}\varphi(0)=\dfrac{F(0)}{f(0)},\\ \text{puis, par la formule précédente :}\\ \varphi'(0)=\dfrac{F'(0)}{f(0)}-\dfrac{1}{f(0)}\cdot\varphi(0)\cdot f'(0),\\ \varphi''(0)=\dfrac{F''(0)}{f(0)}-\dfrac{1}{f(0)}\left\{2\varphi'(0)\cdot f'(0)+\varphi(0)f''(0)\right\}\\ \varphi'''(0)=\dfrac{F'''(0)}{f(0)}-\dfrac{1}{f(0)}\left\{3\varphi''(0)f'(0)+3\varphi'(0)f''(0)+\varphi(0)f'''(0)\right\},\\ \varphi^{IV}(0)=\dfrac{F^{IV}(0)}{f(0)}-\dfrac{1}{f(0)}\left\{4\varphi'''(0)f'(0)+6\varphi''(0)f''(0)+4\varphi'(0)f'''(0)+\varphi(0)f^{IV}(0)\right\},\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

Ces expressions donneront, pour le procédé recurrent, les valeurs des coëfficients $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, etc., de la série ci-dessus.

Quand $Fx=1$, les premiers termes des formules (a) disparaîtront et ces formules serviront alors au développement en série d'une fonction de la forme

$$\varphi x=\frac{1}{fx}.$$

LEMME. $\varphi(n)$ *désignant une fonction quelconque de la variable* n, *je dis que la condition*

$$\left[\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}\right]_{n=\frac{1}{0}}<1,$$

entraînera la suivante :

$$[\varphi(n)]_{n=\frac{1}{0}}=0.$$

Démonstration. Soit $\alpha<1$, et

$$\left[\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}\right]_{n=\frac{1}{0}}=\alpha,$$

on pourra poser

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=\alpha+\varepsilon,$$

ε devenant de plus en plus petit, à mesure que n augmente. On peut donc supposer v assez grand pour que ε soit $< 1-\alpha$ ou que $\alpha+\varepsilon<1$, alors on aura, à partir de cette valeur de v les inégalités suivantes :

$$\frac{\varphi(v+1)}{\varphi(v)} = \alpha+\varepsilon<1,$$

$$\frac{\varphi(v+2)}{\varphi(v+1)} < \alpha+\varepsilon,$$

$$\frac{\varphi(v+3)}{\varphi(v+2)} < \alpha+\varepsilon,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\varphi(v+p)}{\varphi(v+p-1)} < \alpha+\varepsilon.$$

En multipliant ces p inégalités entre elles, on aura, après la suppression des facteurs communs :

$$\frac{\varphi(v+p)}{\varphi(v)} < (\alpha+\varepsilon)^p.$$

Soit $v+p=n$, donc $p=n-v$, on aura

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(v)} < (\alpha+\varepsilon)^{n-v}, \quad \text{ou}$$

$$\varphi(n) < \frac{\varphi(v)}{(\alpha+\varepsilon)^v}\cdot(\alpha+\varepsilon)^n.$$

Comme on a $\alpha+\varepsilon<1$, il est clair que $(\alpha+\varepsilon)^{\frac{1}{0}}=0$; donc, en posant $n=\frac{1}{0}$ dans la relation précédente, le 2^d membre disparaîtra, et l'on aura :

$$[\varphi(n)]_{n=\frac{1}{0}} = 0.$$

EXISTENCE DE LA SÉRIE DE MACLAURIN PAR RAPPORT AUX LIMITES DE LA VARIABLE.

THÉORÈME. *La série de Maclaurin sous la forme*

$$fx = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \text{etc.},$$

subsistera pour tout x, *dont la valeur absolue est plus petite que la valeur absolue du rapport*

$$\left[\frac{A_n}{A_{n+1}}\right]_{n=\frac{1}{0}}.$$

Démonstration. On a :

$$fx = f0 + f'0 \cdot x + \frac{f''0}{1\cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}0}{1\cdot 2\ldots n-1} x^{n-1} + R_n,$$

$$= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = x^n \cdot \frac{f^{(n)}(\alpha \cdot x)}{1\cdot 2\ldots n}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Donc la série infinie

$$fx = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \text{etc.},$$

subsistera quand on aura

$$[R_n]_{n=\frac{1}{0}} = 0.$$

Mais, par hypothèse $f^{(n)}x$, reste fini quand x varie de $x=0$ à $x=x$, donc, en faisant

$$R'_n = \frac{f^{(n)}0}{1\cdot 2\ldots n} \cdot x^n,$$

la série précédente subsistera quand on aura

$$[R'n]_{n=\frac{1}{0}} = 0.$$

Mais, en vertu du lemme précédent, cette dernière condition est remplie, quand on aura

$$\frac{R'_{n+1}}{R'n} < 1 \quad \text{pour} \quad n=\frac{1}{0}.$$

Mais on a :

$$\frac{R'_{n+1}}{R'n} = \frac{x^{n+1} A_{n+1}}{x^n An} = x \frac{A_{n+1}}{An}.$$

Donc la série infinie subsistera pour les valeurs de x qui satis-

font à la condition

$$x\left[\frac{A_{n+1}}{An}\right]_{n=\frac{1}{0}} < 1,$$

ou, à la suivante :

$$x < \left[\frac{An}{A_{n+1}}\right]_{n=\frac{1}{0}},$$

abstraction faite du signe de x.

CONDITION DE LA CONVERGENCE.

Le polynome

$$f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \text{etc.} + f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} + R_n$$

est dit convergent, quand pour des valeurs croissantes de n, le reste R_n s'approche indéfiniment de zéro. Donc, dans le cas où l'on a

$$[Rn]_{n=\frac{1}{0}} = 0,$$

la série infinie

$$f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \text{etc.} \qquad (\alpha)$$

est convergente, et aura pour somme fx.

Il suit de là, que la condition de convergence de le série (α) ou, ce qui revient au même, de la suivante

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \text{etc.}, \qquad (\beta)$$

est la même que la condition d'existence de la relation

$$fx = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \text{etc.}$$

Donc la série (β) sera convergente, quand on aura

$$x\left[\frac{A_{n+1}}{An}\right]_{n=\frac{1}{0}} < 1 \quad \text{ou} \quad x < \left[\frac{An}{A_{n+1}}\right]_{n=\frac{1}{0}}.$$

LIMITES DE LA SÉRIE DE MACLAURIN.

On a : $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots +$

$$f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} + \frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(\varepsilon x)\,;\ 0<\varepsilon<1.$$

Donc, si nous prenons pour fx, qui est la somme vraie de la

série infinie

$$f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x}{1\cdot 2}+\text{etc.},$$

la partie

$$f(0)+f'(0)x+f''(0)\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2}+\text{etc.}+f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1}, \quad (\gamma)$$

l'erreur commise sera exactement

$$R_n=\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(\varepsilon x).$$

Mais si G représente la plus grande, H la plus petite des valeurs de $f^{(n)}(x)$, correspondantes aux diverses valeurs de x, depuis $x=0$ jusqu'à $x=x$, il est clair que l'on aura :

$$\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}H<R_n'<\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}G. \quad (\delta)$$

Donc l'erreur commise, en prenant le polynome fini (γ), pour la valeur fx de la série infinie, sera comprise entre les limites assignées par la formule (δ).

Dans le plus grand nombre des cas, on trouve les valeurs de H et de G, en faisant dans l'expression $f^{(n)}(\varepsilon x)$, $\varepsilon=0$ et $\varepsilon=1$.

Nous avons supposé que la série avait tous ses termes positifs, s'ils sont, au contraire, alternativement positifs et négatifs, il est clair que

$$M=\frac{x^n}{1.2\ldots n}H,\ N=\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}G,$$

seront encore les limites de R, car il suffira de changer x en $-x$ pour que tous les termes de la série reçoivent le même signe. Mais alors M sera la limite inférieure, quand le $n+1^e$ terme est négatif et la limite supérieure quand ce même terme est positif. La formule (δ) sert, dans tous les cas, à trouver des limites de plus en plus approchées de la fonction $f\alpha$, dans le cas où la série proposée est convergente, pour $x=\alpha$. En effet, soient

$$f(0)+f'(0)x+\ldots+f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{1\ldots n-1}+f^{(n)}(0)\cdot\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}=a_{n+1},$$

$$f(0)+f'(0)x+\ldots+f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{1\ldots n-1}=a_n,$$

On aura : $H=f^{(n)}(0)$, $G=f^{(n)}x$, $fx=a_n+R_n$, et par (δ) :

$$\frac{x^n}{1\ldots n}\cdot f^{(n)}(0)<R_n'<\frac{x^n}{1\ldots n}\cdot f^{(n)}(x).$$

Ajoutons a_n, on aura pareillement

$$a_n + \frac{x^n}{1\ldots n} \cdot f^{(n)}(0) < a_n + R_n < a'_n + \frac{x^n}{1\ldots n} f^{(n)}(x),$$

ou $$a_{n+1} < f(x) < a_n + \frac{x^n}{1\ldots n} \cdot f^{(n)}(x). \qquad (a)$$

Donc si α est une valeur de x pour laquelle la série proposée est convergente, l'on voit que la formule

$$a'_{n+1} < f(\alpha) < a'_n + \frac{\alpha^n}{1\ldots n} f^{(n)}(\alpha), \qquad (b)$$

donnera pour $f(\alpha)$ deux limites d'autant plus resserrées que n sera plus grand.

Exemple. Soit $fx = e^x$, donc $f^{(n)}x = e^x$. Prenons

$$a_{n+1} = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^5}{1\ldots 5},$$

donc $n = 4$, on aura, par la formule (a) :

$$1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\ldots 5} < e^x$$

$$< 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5 \cdot e^x}{1\cdot 2\ldots 5}.$$

Pour $x = 1$, on a, par la formule (b) :

$$1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\ldots 4} + \frac{1}{1\ldots 5} < e$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{e}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Mais on a :

$$1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\ldots 4} + \frac{1}{1\ldots 5} = 2,716\ldots$$

$$1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\ldots 4} = \quad 2,708\ldots$$

On a donc $e > 2,716\ldots$,

et $e < 2,708\ldots + \frac{e}{1\ldots 5}$ ou $e < \frac{2,708\ldots}{0,991\ldots}$ ou $e < 2,78\ldots$.

Donc si l'on veut pousser le calcul de e jusqu'à avoir sept chiffres décimaux exacts, il faudra prendre un nombre de termes de la série

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.},$$

tel que les deux limites, calculées par la formule (b), ne diffèrent point dans leurs sept premiers chiffres décimaux.

Transformation de la Formule de Maclaurin, dans le cas d'une variable imaginaire.

Soit x imaginaire, et par conséquent de la forme

$$x = a + b\sqrt{-1},$$

on aura : $$f(a+b\sqrt{-1}) = f(0) + \frac{a+b\sqrt{-1}}{1} f'(0) +$$

$$\frac{(a+b\sqrt{-1})^2}{1\cdot 2} f''(0) + \frac{(a+b\sqrt{-1})^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(0) + \text{etc.} \quad (1$$

Posons $a + b\sqrt{-1} = re^{\varphi\sqrt{-1}} = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$;

d'où : $$r = \sqrt{a^2+b^2},\ \varphi = \text{arc tg}\,\frac{b}{a},$$

et $$fx = f(a+b\sqrt{-1}) = \psi(a,b) + \sqrt{-1}\,\xi(a,b) = Re^{\theta\sqrt{-1}}$$
$$= R(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

d'où : $$R = \sqrt{\psi(a,b)^2 + \xi(a,b)^2},\quad \theta = \text{arc tg}\,\frac{\xi(a,b)}{\psi(a,b)},$$

on aura, à la place de la formule 1), la suivante :

$$R(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = f(0) + \frac{r\cos\varphi}{1} f'(0) + \frac{r^2\cos 2\varphi}{1\cdot 2} f''(0) +$$

$$\frac{r^3\cos 3\varphi}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(0) + \text{etc.} + \sqrt{-1}\left\{\frac{r\sin\varphi}{1} f'(0) + \frac{r^2\sin 2\varphi}{1\cdot 2} f''(0) + \right.$$
$$\left. \frac{r^3\sin 3\varphi}{1\cdot 2\cdot 3} f''(0) + \text{etc.}\right\}. \quad (A)$$

Cette équation se partage en deux, savoir :

$$R\cos\theta = f(0) + \frac{r\cos\varphi}{1} f'(0) + \frac{r^2\cos 2\varphi}{1\cdot 2} f''(0) +$$

et $$\frac{r^3\cos 3\varphi}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(0) + \text{etc.}, \quad (\alpha$$

$$R\sin\theta = \frac{r\sin\varphi}{1} f'(0) + \frac{r^2\sin 2\varphi}{1\cdot 2} f''(0) + \frac{r^3\sin 3\varphi}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(0) + \text{etc.} \quad (\beta$$

Mais les facteurs $\cos\varphi$, $\cos 2\varphi$, etc., $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$, etc., ne pou-

vant surpasser l'unité, il est clair que les séries (α et (β, subsisteront, quand la suivante

$$f(0)+\frac{r}{1}f'(0)+\frac{r^2}{1.2}f''(0)+\text{etc.},$$

ou

$$A_0+rA_1+A_2\frac{r^2}{1.2}+\text{etc.},$$

aura lieu, c'est-à-dire, quand on aura

$$r<\left[\frac{An}{A_{n+1}}\right]_{n=\frac{1}{0}}.$$

D'où il suit que la proposée (I aura également lieu sous la condition $\sqrt{a^2+b^2}<\left[\frac{An}{An+1}\right]_{n=\frac{1}{0}}$, $A_n=\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}$.

Il suit encore de là que sous la même condition une série de la forme

$$A_0+(a+b\sqrt{-1})A_1+(a+b\sqrt{-1})^2A_2+\text{etc.},$$

sera convergente et aura une somme.

(B). APPLICATIONS DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

1. Développement du binôme.

a) *Cas réel.* Soit $f(x)=(1+x)^\mu$, on aura :

$$f^{(n)}(x)=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{(1+x)^{n-\mu}},$$

et quand on n'a pas $x=-1$, les fonctions $f(x)$, $f'x$, $f''(x)$, etc., à l'infini, ne prendront jamais la forme $\frac{1}{0}$.

On a donc :

$$A_n=\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n};$$

donc la formule de Maclaurin donne

$$(1+x)^\mu=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$

Cette formule subsistera pour tout x dont la valeur absolue est plus petite que la valeur absolue du rapport

$$\left[\frac{An}{An+1}\right]_{n=\frac{1}{0}}=\left[\frac{n+1}{\mu-n}\right]_{n=\frac{1}{0}}=\left[-1-\frac{\mu+1}{n-\mu}\right]_{n=\frac{1}{0}}=-1.$$

Donc la formule précédente subsiste pour tout x dont la valeur absolue est plus petite que 1.

On a donc :

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2 + \text{etc.}$$

$$-1 < x < 1.$$

Coroll. 1. Soit $x = \frac{a}{b}$, on déduit facilement de la formule précédente :

$$(a+b)^{\mu} = a^{\mu}\left\{1 + \mu\frac{b}{a} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \text{etc.}\right\}.$$

$$-1 < \frac{b}{a} < 1.$$

Coroll. 2. La formule précédente, connue sous le nom de Binôme de Newton, peut être utilisée pour extraire, par approximation, des racines élevées des nombres. Si, par exemple, on demandait la racine n^e de a, il faudrait choisir pour α et β des valeurs entières telles que l'équation

$$\alpha^n - a\beta^n = \pm\gamma,$$

γ étant très-petit par rapport à α^n, soit satisfaite; car alors on aura :

$$\sqrt[n]{a} = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 \pm \frac{\gamma}{\alpha^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

b) *Cas imaginaire.* Soit

$$x = a + b\sqrt{-1}, \quad \mu = m + n\sqrt{-1};$$

comme la formule de Maclaurin subsiste, quelque soit la fonction et sa variable, pourvu qu'elle satisfasse aux conditions d'existence indiquée ci-dessus, il est clair que le binôme

$$[1 + a + b\sqrt{-1}]^{m+n\sqrt{-1}} = 1 + \frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(a+b\sqrt{-1})$$

$$+ \frac{(m+n\sqrt{-1})(m+n\sqrt{-1}-1)}{1.2}(a+b\sqrt{-1})^2 + \text{etc.},$$

subsistera sous la condition de

$$r = \sqrt{a^2+b^2} < 1.$$

Remarque. Donnons au premier membre de la formule précédente la forme $A + B\sqrt{-1}$. A cet effet posons

$$1+a+b\sqrt{-1} = e^{\log(1+a+b\sqrt{-1})}.$$

Mais on a :

$$\log(p+q\sqrt{-1}) = \log\cdot\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi) = \log\rho e^{\varphi\sqrt{-1}},$$
$$= \log\rho+\varphi\sqrt{-1},$$
$$= \log\sqrt{p^2+q^2}+\sqrt{-1}\operatorname{arc\,tg}\frac{q}{p};$$

donc $\log(1+a+b\sqrt{-1}) = \log\sqrt{(1+a)^2+b^2} + \sqrt{-1}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{1+a}$.

On a donc aussi :

$$1+a+b\sqrt{-1} = e^{\log\sqrt{(1+a)^2+b^2}+\sqrt{-1}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+a}},$$

et $(1+a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} =$

$$e^{(m+n\sqrt{-1})\log\sqrt{(1+a)^2+b^2}+(m+n\sqrt{-1})\sqrt{-1}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+a}}$$

$$= \left[e^{\log(\overline{1+a}^2+b^2)}\right]^{\frac{m}{2}}\cdot e^{-n\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+a}}$$
$$\cdot e\left[\frac{n}{2}\log(\overline{1+a}^2+b^2)+m\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+a}\right]\sqrt{-1}$$

$$= (\overline{1+a}^2+b^2)^{\frac{m}{2}}\cdot e^{-n\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+a}}\cdot\left\{\cos\left[\frac{n}{2}\log(\overline{1+a}^2+b^2)+\right.\right.$$
$$\left.\left.m\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+a}\right]+\sin\left[\frac{n}{2}\log(\overline{1+a}^2+b^2)+m\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+a}\right]\right\}.$$

On a donc

$$(\overline{1+a}^2+b^2)^{\frac{m}{2}}\, e^{-n\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+a}}\left\{\cos\left[\frac{n}{2}\log(\overline{1+a}^2+b^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.m\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+a}\right]+\sqrt{-1}\sin\left[\frac{n}{2}\log(\overline{1+a}^2+b^2)+m\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+a}\right)\right\}$$

$$= 1 + \frac{m + n\sqrt{-1}}{1}(a + b\sqrt{-1}) +$$

$$\frac{(m + n\sqrt{-1})(m + n\sqrt{-1} - 1)}{1 \cdot 2}(a + b\sqrt{-1})^2 + \text{etc., etc.,}$$

pour toute valeur de m et de n, quand $\sqrt{a^2 + b^2} < 1$.

Cette expression conduit à beaucoup de formules particulières très-remarquables, et pour la déduction desquelles nous renvoyons aux OEuvres complètes d'Abel, t. I, p. 87 et suiv.

Par exemple soit $a + b\sqrt{-1}) = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, $n = 0$, on aura $\sqrt{1 + a^2 + b^2} = 1 + 2r\cos\varphi + r^2$, $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, et la formule ci-dessus deviendra :

$$(1 + 2r\cos\varphi + r^2)^{\frac{m}{2}} \left\{ \cos\left[m \operatorname{arc\,tg} \frac{r\sin\varphi}{1 + r\cos\varphi} \right] + \right.$$

$$\left. \sqrt{-1}\sin\left[m \operatorname{arc\,tg} \frac{r\sin\varphi}{1 + r\cos} \right] \right\} = 1 + mr[\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi] +$$

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} r^2 [\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi] + \text{etc.}$$

En comparant les termes réels des deux membres, puis ceux qui sont multipliés par $\sqrt{-1}$, cette égalité fournira les deux suivantes :

$$(1 + 2r\cos\varphi + r^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \cos\left[m \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{r\sin\varphi}{1 + r\cos\varphi} \right] = 1 + mr\cos\varphi +$$

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} r^2 \cos 2\varphi + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3 \cos 3\varphi + \text{etc.,}$$

$$(1 + 2r\cos\varphi + r^2)^{\frac{m}{2}} \sin\left[m \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{r\sin\varphi}{1 + r\cos\varphi} \right] = mr\sin\varphi +$$

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} r^2 \sin 2\varphi + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3 \sin 3\varphi + \text{etc.}$$

2. Développement des fonctions exponentielles.

a) *Cas réel.* Soit $fx = e^x$, on aura $f^{(n)}x = e^x$, et par conséquent aucune des fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc., ne pourra prendre la forme $\frac{1}{0}$. On a de plus

$$A_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \ldots n} = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

$$\left[\frac{An}{An+1}\right]_{n=\frac{1}{0}} = [n+1]_{n=\frac{1}{0}} = \frac{1}{0}.$$

On a donc la série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.},$$

pour tout $x < \frac{1}{0}$, c'est-à-dire, pour toutes les valeurs possibles de x.

Si x est négatif, on a :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

Pour $x = 1$, on obtient

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.} = 2{,}7182818284590\ldots.$$

b) *Cas imaginaire.* Soit $x = a + b\sqrt{-1}$, la formule ci-dessus devient :

$$e^{a+b\sqrt{-1}} = 1 + (a + b\sqrt{-1}) + \frac{(a+b\sqrt{-1})^2}{1 \cdot 2} + \frac{(a+b\sqrt{-1})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.} \qquad (I$$

Cette formule subsistera pour toute valeur de $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Posons $a + b\sqrt{-1} = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}$, on aura

$$e^{a+b\sqrt{-1}} = e^a \cdot e^{b\sqrt{-1}} = e^a \left\{\cos b + \sqrt{-1}\sin b\right\}$$

$$= 1 + r\cos\varphi + \frac{r^2}{1 \cdot 2}\cos 2\varphi + \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\cos 3\varphi + \text{etc.} +$$

$$\sqrt{-1}\left\{r\sin\varphi + \frac{r^2}{1 \cdot 2}\sin 2\varphi + \frac{r}{1 \cdot 2 \cdot 3}\sin 3\varphi + \text{etc.}\right\};$$

d'où l'on conclut :

$$e^a \cos b = 1 + \sqrt{a^2+b^2} \cos\left[\text{arc tg } \frac{b}{a}\right] + \frac{(\sqrt{a^2+b^2})^2}{1.2} \cos\left[2 \text{ arc tg } \frac{b}{a}\right] + \frac{(\sqrt{a^2+b^2})^3}{1.2.3} \cos\left[3 \text{ arc tg } \frac{b}{a}\right] + \text{etc.},$$

$$e^a \sin b = \sqrt{a^2+b^2} \sin\left[\text{arc tg } \frac{b}{a}\right] + \frac{(\sqrt{a^2+b^2})^2}{1.2} \sin\left[2 \text{ arc tg } \frac{b}{a}\right] + \frac{(\sqrt{a^2+b^2})^3}{1.2.3} \sin\left[3 \text{ arc tg } \frac{b}{a}\right] + \text{etc.}$$

Si, dans la formule (I, on fait $a = 0$, elle donne

$$e^{b\sqrt{-1}} = 1 - \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} + \sqrt{-1}\left(b - \frac{b^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right);$$

On a donc aussi, en changeant b en $-b$:

$$e^{-b\sqrt{-1}} = 1 - \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} - \sqrt{-1}\left(b - \frac{b^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right).$$

De ces formules on tire, par addition et soustraction :

$$e^{b\sqrt{-1}} + e^{-b\sqrt{-1}} = 2\left(1 - \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\right),$$

$$e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\left(b - \frac{b^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right).$$

3. Développement des fonctions logarithmiques.

a) *Cas réel.* Soit $fx = \log(1+x)$, on aura :

$$f^{(n)}x = \frac{(-1)^{n-1} 1.2 \ldots (n-1)}{(1+x)^n};$$

d'où l'on voit que, pour $x = -1$ excepté, les fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc., à l'infini, ne prennent jamais la forme $\frac{1}{0}$.

On a de plus ici

$$A^n = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2 \ldots n} = \frac{(-1)^n}{n};$$

donc

$$\left[\frac{An}{An+1}\right]_{n=\frac{1}{0}} = \left[\frac{n+1}{n}\right]_{n=\frac{1}{0}} = \left[1+\frac{1}{n}\right]_{n=\frac{1}{0}} = 1 ;$$

donc la série

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \text{etc.},$$

subsiste pour tout x, dont la valeur absolue est <1 ; donc pour

$$-1 < x < 1.$$

Si x est négatif on a :

$$\log(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \text{etc.},$$

$$-1 < x < 1.$$

En retranchant la seconde de ces formules de la première, il vient :

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left\{x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \text{etc.}\right\}, \qquad (\alpha$$

$$-1 < x < 1.$$

Soit $z = \dfrac{1+x}{1-x}$, d'où $x = \dfrac{z-1}{z+1}$, on aura :

$$\log z = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \text{etc.}\right\}.$$

Comme on a $\log(a+b) = \log a + \log\left(1+\dfrac{b}{a}\right)$, on aura aussi :

$$\log(a+b) = \log a + \left(\frac{b}{a}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \text{etc.},$$

$$-1 < \frac{b}{a} < 1.$$

Cette formule donne $\log(a+b)$, quand on connaît $\log a$. Comme on a identiquement

$$\log(a+b) = \log a + \log\left\{\frac{1+\dfrac{b}{2a+b}}{1-\dfrac{b}{2a+b}}\right\},$$

on trouve, par la formule (α) :

$$\log(a+b) = \log a + 2\left\{\left(\frac{b}{2a+b}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \text{etc.}\right\}$$

Cette formule converge plus rapidement que la précédente, de

plus elle subsiste quelques soient les nombres a et b, supposés positifs, car on aura toujours $\frac{b}{2a+b} < 1$.

Comme on a $x = e^{\log x} = a^{\mathrm{Log}\, x}$, on en déduit

$$\mathrm{Log}\, x = \frac{1}{\log a} \cdot \log x. \quad = \mathrm{M} \cdot \log x, \quad \mathrm{M} = \frac{1}{\log a}.$$

Donc le logarithme de x, a étant la base, se trouve en multipliant le logarithme népérien de x par la constante

$$\mathrm{M} = \frac{1}{\log a} = \log e,$$

nommée Module.

Exemple. Soit $a = 10$, base des logarithmes de Briggs, on aura $\log 10 = 2{\cdot}30258509 \ldots$, et

$$\mathrm{M} = 0{,}434294482 \ldots$$

b) *Cas imaginaire.* Soit $x = a + b\sqrt{-1} = re^{\varphi\sqrt{-1}}$

$$= r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

on aura :

$$\log(1+a+b\sqrt{-1}) = a+b\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}(a+b\sqrt{-1})^2 + \tfrac{1}{3}(a+b\sqrt{-1})^3 - \text{etc.},$$

$$\sqrt{a^2+b} < 1.$$

Ou :

$$\log\sqrt{(1+a)^2+b^2} + \sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a+1} = r\cos\varphi - \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{r^3}{3}\cos 3\varphi - \text{etc.} + \sqrt{-1}\left\{r\sin\varphi - \frac{r^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{r^3}{3}\sin 3\varphi - \text{etc.}\right\}.$$

De cette équation on conclut les suivantes :

$$\log\sqrt{(1+a)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}) - \tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})^2\cos(2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}) + \tfrac{1}{3}(\sqrt{a^2+b^2})^3\cos(3\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}) - \text{etc.},$$

$$\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a+1} = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}) - \tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})^2\sin(2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}) + \tfrac{1}{3}(\sqrt{a^2+b^2})^3\sin(3\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}) - \text{etc.}$$

Ces formules peuvent aussi s'écrire de cette manière :

$$\tfrac{1}{2}\log(1+2r\cos\varphi+r^2)=r\cos\varphi-\frac{r^2}{2}\cos 2\varphi+\frac{r^3}{3}\cos 3\varphi-\text{etc.},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\sin\varphi}=r\sin\varphi-\frac{r^2}{2}\sin 2\varphi+\frac{r^3}{3}\sin 3\varphi-\text{etc.};$$

car on a $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$, $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ces séries subsistent pour $-1<r<1$.

4. Développement des fonctions trigonométriques.

(A) Sinus et Cosinus.

α) *Cas réel.* 1° Soit $fx=\sin x$, on a $f^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, donc fx, $f'x$, $f''x$, etc., ne peuvent jamais prendre la forme $\frac{1}{0}$.

On a de plus :

$$f(0)=0,\ f''(0)=0,\ f^{IV}(0)=0,\ \text{etc.},$$
$$f'(0)=1,\ f'''(0)=-1,\ f^{V}(0)=+1,\ \text{etc.}$$

On a donc la série

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\text{etc.} \qquad (\alpha$$

2° Pour $fx=\cos x$, on trouverait $f^{(n)}x=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, et par conséquent

$$f(0)=1,\ f''(0)=-1,\ f^{IV}(0)=+1,\ \text{etc.},$$
$$f'(0)=0,\ f'''(0)=0,\ f^{V}(0)=0,\ \text{etc.},$$

donc $$\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\text{etc.} \qquad (\beta$$

Les formules (α et (β subsistent pour toutes les valeurs de x, car elles sont identiques avec les suivantes :

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{x\sqrt{-1}}}{2}=1-\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\text{etc.},$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1.2...5} - \text{etc.},$$

trouvées ci-dessus, et qui ont lieu pour tout x.

Remarque. Les équations

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

donnent

$$\left.\begin{aligned} 1^\circ \quad e^{x\sqrt{-1}} &= \cos x + \sqrt{-1}\sin x, \\ e^{-x\sqrt{-1}} &= \cos x - \sqrt{-1}\sin x, \end{aligned}\right\}. \qquad (1$$

Donc en faisant $\sin x = \varphi$ ou $x = \arcsin \varphi$, on aura :

$$e^{\sqrt{-1}\,\arcsin \varphi} = \sqrt{1-\varphi^2} + \sqrt{-1}\cdot\varphi,$$

donc en prenant les logarithmes :

$$\sqrt{-1}\,\arcsin\cdot\varphi = \log\left\{\sqrt{1-\varphi^2} + \varphi\sqrt{-1}\right\},$$

ou $$\arcsin\cdot\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\left\{\sqrt{1-\varphi^2} + \varphi\sqrt{-1}\right\}.$$

On trouverait de même :

$$\arccos\cdot\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\left\{\varphi + \sqrt{-1}\sqrt{1-\varphi^2}\right\}.$$

2° En divisant les équations (1, on en tire

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{\cos x + \sqrt{-1}\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\sin x} = \frac{1+\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,x}{1-\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,x}.$$

Donc en posant $\mathrm{tg}\,x = \varphi$, $x = \mathrm{arc\,tg}\cdot\varphi$, on aura, en prenant les logarithmes :

$$\mathrm{arc\,tg}\cdot\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\left\{\frac{1+\sqrt{-1}\cdot\varphi}{1-\sqrt{-1}\cdot\varphi}\right\}.$$

β) *Cas imaginaire.* Si dans les formules

$$\sin b = \frac{e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos b = \frac{e^{b\sqrt{-1}} + e^{-b\sqrt{-1}}}{2},$$

on change b en $b\sqrt{-1}$, on aura :

$$\sin(b\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\left(\frac{e^b - e^{-b}}{2}\right), \quad \cos(b\sqrt{-1}) = \frac{e^b + e^{-b}}{2}.$$

Cela posé, les formules $\sin(a+b\sqrt{-1})$, $\cos(a+b\sqrt{-1})$ donneront :

$$\sin(a+b\sqrt{-1}) = \sin a \cos(b\sqrt{-1}) + \cos a \sin(b\sqrt{-1})$$
$$= \frac{e^b + e^{-b}}{2} \sin a + \sqrt{-1} \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} \cos a,$$
$$\cos(a+b\sqrt{-1}) = \cos a \cos b\sqrt{-1} - \sin a \sin b\sqrt{-1}$$
$$= \frac{e^b + e^{-b}}{2} \cos a - \sqrt{-1}\frac{e^b - e^{-b}}{2} \sin a.$$

Donc on a :

1° $$\sin(a+b\sqrt{-1}) = (a+b\sqrt{-1}) - \frac{(a+b\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

ou $$\frac{e^b + e^{-b}}{2} \sin a + \sqrt{-1} \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} \cos a = (a+b\sqrt{-1}) - \frac{(a+b\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Soit $a + b\sqrt{-1} = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, il viendra :

$$\frac{e^{r\sin\varphi} + e^{-r\sin\varphi}}{2} \cdot \sin(r\cos\varphi) +$$
$$\sqrt{-1} \cdot \frac{e^{r\sin\varphi} - e^{-r\sin\varphi}}{2} \cos(r\cos\varphi) = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) -$$
$$\frac{r^3}{1.2.3}(\cos 3\varphi + \sqrt{-1}\sin 3\varphi) + \text{etc.}$$

En comparant les termes réels et les imaginaires séparément, cette équation fournira ces deux autres :

$$\frac{e^{r\sin\varphi} + e^{-r\sin\varphi}}{2} \cdot \sin(r\cos\varphi) = r\cos\varphi - \frac{r^5}{1.2.3}\cos 3\varphi + \text{etc.},$$
$$\frac{e^{r\sin\varphi} - e^{-r\sin\varphi}}{2} \cdot \cos(r\cos\varphi) = r\sin\varphi - \frac{r^3}{1.2.3}\sin 3\varphi + \text{etc.}$$

2° On aura aussi :

$$\cos(a+b\sqrt{-1}) = 1 - \frac{(a+b\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(a+b\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4} - \text{etc.};$$

$$\cos a \cdot \frac{e^{-b}+e^{b}}{2} + \sqrt{-1} \cdot \frac{e^{-b}-e^{b}}{2} \sin a = 1 -$$

$$\frac{r^2}{1\cdot 2}(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi) +$$

$$\frac{r^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\cos 4\varphi + \sqrt{-1}\sin 4\varphi) - \text{etc.}$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{e^{r\sin\varphi}+e^{-r\sin\varphi}}{2} \cdot \cos(r\cos\varphi) = 1 - \frac{r^2}{1\cdot 2}\cos 2\varphi +$$

$$\frac{r^4}{1\ldots 4}\cos 4\varphi - \text{etc.},$$

$$\frac{e^{r\sin\varphi}-e^{-r\sin\varphi}}{2} \cdot \sin(r\cos\varphi) = \frac{r^2}{1\cdot 2}\sin 2\varphi -$$

$$\frac{r^4}{1\ldots 4}\sin 4\varphi + \text{etc.}.$$

Remarque. Donnons une application numérique des séries du sinus et du cosinus.

On donne deux côtés $a = 120^{mè}$, $b = 80^{mè}$, et l'angle compris $C = 44°53'27''$, calculer la surface du triangle par la formule

$$S = \tfrac{1}{2} a b \sin D = 4800 \cdot \sin 44°53'27'',$$

sans recourir aux tables.

On a :

$$\sin 44°53'27'' = \sin(45° - 6',45) = \sin 45° \cos 6',45 -$$

$$\cos 45° \sin 6',45,$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}[\cos 6',45 - \sin 6',45],$$

$$= 0{,}7071\,[\cos 6',45 - \sin 6',45].$$

Évaluons en unités du rayon, l'arc $6',45$ exprimé en minutes ; pour cela on a la proportion

$$(60.360)' : 6',45 :: 2\pi : x, \quad \text{d'où} \quad x = 2\pi \cdot \frac{6,45}{60.360} = 0{,}001876;$$

donc $x^2 = 0{,}0000033$.

Donc $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \ldots = 1 - 0{,}000002 = 0{,}999998$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots = \frac{0{,}001876}{\cos x - \sin x = 0{,}998122};$$

Donc $\sin 44°55'27'' = 0{\cdot}7071 \times 0{,}998122 = 0{,}7058$,

donc $S = 4800 \cdot 0{,}7058 = 3387{,}8^{mè}$.

(B) Tangente, Sécante.

Tangente. On a $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; en comparant cette formule à l'expression générale $\varphi x = \dfrac{Fx}{fx}$, on trouve $Fx = \sin x$, $fx = \cos x$, $\varphi x = \operatorname{tg} x$. Donc

$$F^{(n)}x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),\quad F^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n)}x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),\quad f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2},\quad f(0) = 1.$$

pour $n = 0, 2, 4, 6, \ldots 2p$, on a $F^{(2p)}(0) = 0$, $f^{(2p)}(0) = (-1)^p \cdot 1$;
pour $n = 1, 3, 5, \ldots 2p+1$, on a $F^{(2p+1)}(0) = (-1)^p \cdot 1$,
$f^{(2p+1)}(0) = 0$.

Cela posé, les formules (a), du commencement de ce § donnent :

$$\varphi(0) = \frac{F(0)}{f(0)} = 0,$$

$$\varphi'(0) = \frac{F'(0)}{f(0)} - \frac{1}{f(0)} \cdot \frac{f'(0)}{f(0)} = 1,$$

$$\varphi''(0) = \frac{F''(0)}{f(0)} - \frac{1}{f(0)}\left[2\varphi'(0) f'(0) + \varphi''(0) f(0)\right] = 0,$$

$$\varphi'''(0) = \frac{F'''(0)}{f(0)} - \frac{1}{f(0)}\left[3\varphi''(0) f'(0) + 3\varphi'(0) f'' + \varphi(0) f'''(0)\right] = 2,$$

$$\varphi^{IV}(0) = \frac{F^{IV}(0)}{f(0)} - \frac{1}{f(0)}\left[4\varphi'''(0) f'(0) + 6\varphi''(0) f''(0) + 4\varphi'(0) f'''(0) + \varphi(0) f^{IV}(0)\right] = 0,$$

$$\varphi^{V}(0) = \frac{F^{V}(0)}{f(0)} - \frac{1}{f(0)}\left[5\varphi^{IV}(0) f'(0) + 10\varphi'''(0) f''(0) + 10\varphi''(0) f'''(0) + 5\varphi'(0) f^{IV}(0) + \varphi(0) f^{V}(0)\right] = 16, \text{ etc.},$$

En continuant ainsi on trouve $\varphi^{VI}(0) = 0$, $\varphi^{VII}(0) = 272$.

Donc, à cause de

$$\varphi x = \varphi(0) + \varphi'(0)\, x + \varphi''(0)\, \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.},$$

on a : $$\operatorname{tg} x + \frac{2x^3}{1\ldots3} + \frac{16x^5}{1\ldots5} + \frac{272x^7}{1\ldots7} + \text{etc.} \qquad \text{(I)}$$

Les nombres $T_1=1$, $T_3=2$, $T_5=16$, $T_7=272$, etc., se nomment les coëfficients des tangentes.

Sécante.

Comme on a $\operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x}$, si nous comparons cette formule à l'expression générale $\varphi x = \frac{Fx}{fx}$, on trouve $Fx=1$, $fx=\cos x$.

Donc $F^{(n)}(0)=0$, $f^{(2p)}(0)=(-1)^p\cdot 1$, $f^{(2p+1)}(0)=0$.

On a donc

$\varphi(0)=1$,

$$\varphi'(0) = -\frac{1}{f(0)}\cdot f'(0)\cdot\varphi(0)=0,$$

$$\varphi''(0) = -\frac{1}{f(0)}[2\varphi'.f'0+\varphi(0)f''(0)]=1,$$

$$\varphi'''(0) = -\frac{1}{f(0)}[3\varphi''(0)f'(0)+3\varphi'(0)f''(0)+\varphi(0)f'''(0)]=0,$$

$$\varphi^{IV}(0) = -\frac{1}{f(0)}[4\varphi'''(0)f'(0)+6\varphi''(0)f''(0)+4\varphi'(0)f'''(0)+\varphi(0)f^{IV}(0)]=5,$$

$\varphi^{V}(0)=0$,

$\varphi^{VI}(0)=61$, $\varphi^{VII}(0)=0$, $\varphi^{VIII}(0)=1385$, etc.

Donc la formule

$$\varphi x = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \varphi''(0)\frac{x^2}{1\cdot2} + \text{etc.},$$

donne $$\operatorname{séc} x = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{5x^4}{1\ldots4} + \frac{61x^6}{1\ldots6} + \frac{1385x^8}{1\ldots8} + \text{etc.}$$

Les nombres 1, 1, 5, 61, etc., se nomment les coëfficients des sécantes, nous les désignerons par S_{2p}; voici les neuf premiers de ces coëfficients :

$S_0=1$, $S_2=1$, $S_4=5$, $S_6=61$, $S_8=1385$, $S_{10}=50521$,
$S_{12}=2702765$, $S_{14}=199360981$, $S_{16}=19391512145$,
$S_{18}=2404879661671$.

(C) Arc sin x, arc cos x.

Arc sin x. Soit $fx = \arcsin x$, on aura

$$f'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f''x = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

de celle-ci on déduit

$$(1-x^2)f''x - x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Différentions cette dernière n fois de suite, on trouvera :

$$(1-x^2)f^{(n+2)}x - 2nxf^{(n+1)}x - n(n-1)f^{(n)}x,$$
$$- xf^{(n+1)}x - nf^{(n)}x = 0;$$

d'où l'on tire

$$f^{(n+2)}x = \frac{(2n+1)xf^{(n+1)}x + n^2f^{(n)}x}{1-x^2}.$$

Il suit d'abord de cette formule que les dérivées $f'''x$, $f^{IV}x$, etc., ne prendront jamais la forme $\frac{1}{0}$ pour des valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, car les dérivées $f'x$ et $f''x$ ne deviennent jamais $\frac{1}{0}$ entre ces limites.

On trouve ensuite facilement

$$f(0) = 0, \; f'(0) = 1, \; f''0 = 0,$$

par conséquent la formule précédente donnera :

$$f'''(0) = 1, \; f^{IV}(0) = 0, \; f^{V}(0) = 3^2, \; f^{VI}(0) = 0, \; f^{VII}(0) = 5^2 \cdot 3^2, \text{ etc.}$$

Donc la formule de Maclaurin

$$fx = f(0) + f'(0)x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.},$$

fournira :

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

On a ici

$$\left[\frac{A_n x^7}{A_{n+1} \cdot x^5}\right]_{n=\frac{1}{0}} = x^2 \left[\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}\right]_{n=\frac{1}{0}} = x^2;$$

donc, pour que la valeur absolue de ce rapport soit plus petit que 1, il faut que x soit compris entre -1 et $+1$.

Si l'on pose $z = \arcsin x$ ou $x = \sin z$, alors la formule

ci-dessus deviendra

$$z = \sin z + \tfrac{1}{2}\frac{\sin^5 z}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5 z}{5} + \text{etc.},$$

$$-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}.$$

Arc cos x. On a $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, donc

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \text{etc.},$$

$$-1 < x < 1.$$

Soit $z = \arccos x$, d'où $x = \cos z$, il viendra :

$$z = \frac{\pi}{2} - \cos z - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\cos^3 z}{3}\cdot\frac{\cos^5 z}{5} - \text{etc.},$$

$$-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}.$$

Sin (μ *arc sin* x). Soit $fx = (\mu \arcsin x)$, on aura :

$$f'x = \frac{\mu\cos(\mu\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{1-x^2}\,f'x = \mu\cos(\mu\arcsin x).$$

Une seconde différentiation donnera :

$$\sqrt{1-x^2}\cdot f''x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot f'x = -\frac{\mu^2\sin(\mu\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En chassant les dénominateurs, et en remplaçant $\sin(\mu \arcsin x)$ par fx, on trouvera :

$$(1-x^2)f''x - xf'x = -\mu^2 fx.$$

En différentiant celle-ci n fois de suite, on en déduira :

$$f^{(n+2)}x = \frac{(2n+1)f^{(n+1)}x + (n^2-\mu^2)f^{(n)}x}{1-x^2}.$$

L'on voit d'abord que fx, et toutes les dérivées de cette fonction, ne se réduiront jamais à la forme $\frac{1}{0}$, quand x reste renfermé dans les limites -1 et $+1$.

On trouve ensuite facilement :

$$f(0)=0,\ f'(0)=\mu,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-\mu(\mu^2-1),$$

$$f^{IV}(0)=0,\ f^{V}(0)=\mu(\mu^2-1)(\mu^2-3^2),\ \text{etc.},\ \text{donc}$$

$$\sin(\mu\arcsin x) = \mu x - \frac{\mu(\mu^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{\mu(\mu^2-1)(\mu^2-3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \ldots,$$

Soit $z = \arcsin x$, $x = \sin z$, on pourra écrire la série précédente aussi sous cette forme :

$$\sin \mu z = \mu \sin z - \frac{\mu(\mu^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^3 z + \text{etc.},$$

$$-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}.$$

En différentiant cette équation par rapport à z, on obtient encore :

$$\cos \mu z = \cos z \left\{1 - \frac{\mu^2-1}{1\cdot 2}\sin^2 z + \frac{(\mu^2-1)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4}\sin^4 z - \text{etc.},\right\},$$

$$-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}.$$

Cos (μ *arc sin* x). Soit $fx = \cos(\mu \arcsin x)$,

en opérant comme ci-dessus, on trouve d'abord,

$$f^{(n+2)}x = \frac{(2n+1)x f^{(n+1)}x + (n^2-\mu^2) f^{(n)}x}{1-x^2};$$

puis $$\cos(\mu \arcsin x) = 1 - \frac{\mu^2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \text{etc.},$$

$$-1 < x < 1.$$

Soit $z = \arcsin x$, on pourra écrire aussi

$$\cos \mu z = 1 - \frac{\mu^2}{1\cdot 2}\sin^2 z + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 z - \text{etc.},$$

$$-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}.$$

En différentiant celle-ci par rapport à z, on a encore :

$$\sin \mu z = \cos z \left\{\mu \sin z - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3}\sin^3 z + \text{etc.}\right\},$$

$$-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}.$$

(D) Arc tg x.

Soit $fx = \arctg x$. on aura :

$$f'x = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{ou} \quad (1+x^2) f'x = 1.$$

En différentiant cette équation n fois de suite, on obtiendra

$$(1+x^2)f^{(n+1)}x+2nxf^{(n)}x+n(n-1)f^{(n-1)}x=0, \quad \text{d'où :}$$

$$f^{(n+1)}x=-\frac{2nxf^{(n)}x+n(n-1)f^{(n-1)}x}{1+x^2}.$$

Comme $fx=\frac{1}{1+x^2}$, $f''x=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, ne deviennent jamais $\frac{1}{0}$, entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ de x, il est clair, par la formule précédente, qu'il en sera de même pour toutes les autres dérivées de fx.

On trouve de plus $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, et

$$f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0); \qquad \text{donc}$$

$$f'''(0)=-2\cdot1,\ f^{IV}(0)=0,\ f^{V}(0)=4\cdot3\cdot2\cdot1,\ f^{VI}(0)=0,$$

$$f^{VII}(0)=-6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1, \text{ etc.}$$

Donc $\operatorname{arc\,tg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots.$

On a ici

$$\left[\frac{A_n x^{2n-1}}{A_{n+1}x^{2n+1}}\right]_{n=\frac{1}{0}}=x^2\left[\frac{2n-1}{2n+1}\right]_{n=\frac{1}{0}}=x^2;$$

donc, pour que ce rapport soit <1, il faut que l'on ait

$$-1<x<1.$$

Soit $\operatorname{arc\,tg}x=z$, donc $x=\operatorname{tg}z$, la série précédente devient :

$$z=\operatorname{tg}z-\frac{\operatorname{tg}^3z}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5z}{5}-\text{etc.},$$

$$-\frac{\pi}{4}<z<\frac{\pi}{4}.$$

1re *Remarque.* Comme on a

$$\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

on trouve aussi

$$\operatorname{arc\,tg}x=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{1}{x}\right)+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3-\tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^5+\ldots$$

qui subsiste pour $x>1$.

Pour $\operatorname{arc\,tg}x=z$, d'où : $\frac{1}{x}=\cot z$, on a

$$z = \frac{\pi}{2} - \frac{\cot z}{1} + \frac{\cot^3 z}{3} - \frac{\cot^5 z}{5} + \dots$$

$$z > \frac{\pi}{4}.$$

2^me *Rem.* Comme on a $\operatorname{arc\,tg}\, 1 \cdot = \frac{\pi}{4}$, on a :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \dots .$$

Cette formule converge trop lentement pour être utile au calcul de π.

§ 36.

Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

(a) Cas général.

Définitions et notations. Nous entendons par polynome entier et rationnel, des polynomes de la forme

$$fx = Ax^p + Bx^q + Cx^r + \text{etc.},$$

p, q, r, etc., étant des nombres entiers et positifs, et A, B, C, ... des coëfficients constants.

Nous nommons fraction rationnelle toute fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynomes entiers et rationnels. Elles sont de la forme

$\varphi x = \frac{fx}{Fx} = \frac{Ax^p + Bx^q + \dots + Ex^r}{A'x^{p'} + B'x^{q'} + \dots + Ex^{r'}}$, $p, p', q, q', \dots r, r'$, étant entiers et positifs; A, A', B, B', ... E, E' étant des coëfficients constants; nous supposerons que l'équation $Fx = 0$, ait α racines égales à a, β à b, etc., λ racines égales à l; ces racines étant d'ailleurs quelconques, réelles ou imaginaires. Nous poserons en conséquence :

$$Fx = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-k)^k (x-l)^\lambda,$$
$$F_1 x = (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x-k)^k (x-l)^\lambda,$$
$$F_2 x = (x-c)^\gamma \dots (x-k)^k (x-l)^\lambda,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F_{n-1} = (x-l)^\lambda;$$

le nombre des racines simples $a, b, \ldots l$ étant n. Nous ferons de même

$$\varphi_1 x = \frac{f_1 x}{F_1 x}, \quad \varphi_2 x = \frac{f_2 x}{F_2 x}, \quad \ldots \quad \varphi_{n-1} x = \frac{f_{n-1} x}{F_{n-1} x}.$$

LEMME. 1. *On pourra toujours poser l'égalité*

$$\varphi x = \frac{fx}{Fx} = \frac{\psi x}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1 x}{F_1 x},$$

ψx *et* $f_1 x$ *étant des polynomes rationnels et entiers.*

En effet fx et $F_1 x$ étant des polynomes entiers et rationnels donnés, on pourra toujours déterminer deux polynomes entiers et rationnels $f_1 x$, ψx, tels que l'on ait l'équation

$$fx = F_1 x \cdot \psi x + f_1 x \cdot (x-a)^\alpha ;$$

donc, en divisant les deux membres par $Fx = (x-a)^\alpha F_1 x$, on trouve

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{\psi x}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1 x}{F_1 x}.$$

LEMME 2. *Je dis que la fraction* $\dfrac{\psi x}{(x-a)^\alpha}$ *peut se décomposer en deux parties, savoir* en une *partie qui se réduit à* $\frac{1}{0}$, *pour* $x = a$, *et que nous désignerons par* J_a, *et* en une *partie qui reste finie, pour* $x = a$, *et que nous indiquerons par* K_a, *en sorte que l'on a :*

$$\frac{\psi x}{(x-a)^\alpha} = J_a + K_a.$$

En effet, on a par le théorème général de Maclaurin,

$$\psi x = \psi a + (x-a)\psi' a + (x-a)^\alpha \frac{\psi'' a}{1 \cdot 2} + \ldots + (x-a)^{\alpha-1} \frac{\psi^{(\alpha-1)}}{1 \ldots \alpha - 1}$$

$$+ (x-a)^\alpha \frac{\psi^{(\alpha)} a}{1 \ldots \alpha} + (x-a)^{\alpha+1} \cdot P.$$

P désignant collectivement l'ensemble des termes multipliés par $(x-a)^{\alpha+1}$.

On déduit de là :

$$\frac{\psi x}{(x-a)^\alpha} = \frac{\psi a}{(x-a)^\alpha} + \frac{\psi' a}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\frac{1}{1\cdot 2}\psi'' a}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{\frac{1}{1\ldots\alpha-1}\psi^{(\alpha-1)}a}{x-a} + \frac{\psi^{(\alpha)}a}{1\cdot 2\ldots a} + (x-a)\mathrm{P}.$$

Or, en posant

$$\mathrm{J}_a = \frac{\psi a}{(x-a)^\alpha} + \frac{\psi' a}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\frac{1}{1\cdot 2}\psi'' a}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{\frac{1}{1\cdot 2\ldots\alpha-1}\psi^{\alpha-1}a}{x-a},$$

$$= \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\mathrm{A}_3}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_\alpha}{x-a} \quad \text{et}$$

$$\mathrm{K}_a = \frac{\psi x^{(\alpha)}}{1\cdot 2\ldots a} + (x-a)\mathrm{P},$$

l'on voit que J_a se réduit à la forme $\frac{1}{0}$ pour $x=a$, tandis que K_a devient la quantité finie $\frac{\psi^{(\alpha)}a}{1\cdot 2\ldots a}$, quand on pose $x=a$, on a donc

$$\frac{\psi x}{(x-a)^\alpha} = \mathrm{J}_a + \mathrm{K}_a.$$

Théorème. *En supposant que le numérateur de la fraction rationnelle* $\varphi x = \frac{\mathrm{f}x}{\mathrm{F}x} = \frac{\mathrm{f}x}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-k)^k(x-l)^\lambda}$, *soit d'un degré plus élevé que son dénominateur, et que* Q *exprime le quotient entier de la division de* fx *par* Fx, *je dis que cette fraction sera toujours équivalente à la somme*

$$\varphi x = \frac{\mathrm{f}x}{\mathrm{F}x} = \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_\alpha}{x-a} + \frac{\mathrm{B}_1}{(x-b)^\alpha} + \frac{\mathrm{B}_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{B}_\beta}{x-b} + \frac{\mathrm{L}_1}{(x-l)^\lambda} + \frac{\mathrm{L}_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{L}_\lambda}{x-l} + \mathrm{Q},$$

dans lesquelles les numérateurs sont des quantités constantes.

Démonstration. Car on a, par les deux Lemmes qui précèdent, successivement :

$$\varphi x = \frac{fx}{Fx} = \frac{\psi x}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1 x}{F_1 x} = J_a + K_a + \varphi_1 x,$$

$$\varphi_1 x = \frac{f_1 x}{F_1 x} = \frac{\psi_1 x}{(x-b)^\beta} + \frac{f_2 x}{F_2 x} = J_b + K_b + \varphi_2 x,$$

etc., etc.,

$$\varphi_{n-1} x = \frac{\psi_{n-1} x}{(x-l)^\lambda} = J_l + K_l;$$

donc, en éliminant $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \ldots \varphi_{n-1} x$, on trouve

$$\varphi x = J_a + J_b + \ldots + J_l + K_a + K_b + \ldots + K_l.$$

Soit $K_a + K_b + \ldots + K_l = Q$,

on aura $$\varphi x = J_a + J_b + \ldots + J_l + Q. \qquad (1$$

Mais on a :

$$J_a = \frac{\psi a}{(x-a)^\alpha} + \frac{\psi' a}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{\frac{1}{1\ldots\alpha-1}\psi^{(\alpha-1)} a}{x-a}$$

$$= \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A\alpha}{x-a},$$

$$J_b = \frac{\psi_1 b}{(x-b)^\beta} + \frac{\psi_1' b}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{\frac{1}{1\ldots\beta-1}\psi_1^{(\beta-1)}}{x-b},$$

$$= \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B\beta}{x-b},$$

etc., etc.

$$J_l = \frac{\psi_{n-1} l}{(x-l)^\lambda} + \frac{\psi'_{n-1} l}{(x-l)^\lambda} + \ldots + \frac{\frac{1}{1\ldots\lambda-1}\psi^{(\lambda-1)} l}{x-l}$$

$$= \frac{L_1}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L\lambda}{x-l},$$

en ajoutant ces valeurs et en substituant leur somme dans la formule (1), on a l'expression cherchée.

En effet, en réduisant les expressions $J_a, J_b, \ldots J_l$ au même dénominateur, leur somme pourra être représentée par $\frac{f_n x}{Fx}$,

fraction dont le numérateur sera évidemment d'un degré inférieur à celui du dénominateur.

On aura donc, par la formule (1),

$$\frac{fx}{Fx} = Q + \frac{f_p x}{Fx}.$$

Soit maintenant Q' le quotient entier, et R le reste de la division de fx par Fx, on aura aussi

$$\frac{fx}{Fx} = Q' + \frac{R}{Fx}.$$

En comparant ces deux expressions de $\frac{fx}{Fx}$, on conclura $Q = Q'$, puisque les fractions $\frac{f_p x}{Fx}$, $\frac{R}{fx}$ ne contiennent plus d'entiers.

Détermination des constantes A, B, ... L.

Il y a trois Méthodes pour déterminer les numérateurs

$A_1, A_2, \ldots A_\alpha$, $B_1, B_2, \ldots B_\beta$, etc., $L_1, L_2, \ldots L_\lambda$,

des fractions partielles dont se compose la proposée.

1re Méthode.

Il faut chasser les dénominateurs, ordonner la somme des numérateurs des seconds membres, puis égaler les coëfficients du numérateur du 1er membre, aux coëfficients des termes semblables du numérateur du 2d membre, cela donnera autant d'équations qu'il y a de coëfficients indéterminés.

Exemple. Soit $$\frac{x^2+1}{(x-2)^3(x+1)^2} = \frac{A_1}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x-2} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{(x+1)}.$$

En réduisant au même dénominateur on a :

$$\frac{x^2+1}{(x-2)^3(x+1)^2} = \frac{A_1(x+1)^2 + A_2(x-2)(x+1)^2 + A_3(x-2)^2(x+1)^2 + B_1(x-2)^3 + B_2(x-2)^3(x+1)}{(x-2)^3(x+1)^2}.$$

D'où $x^2+1=(B_2+A_3)x^4+(A_2-2A_3+B_1-3B_2)x^3+(A_1+4A_2-3A_3-6B_1+6B_2)x^2+(2A_1-3A_2+4A_3+12B_1+20B_2)x+(A_1-2A_2+4A_3-8B_1+8B_2)$.

La comparaison des coëfficients des termes semblables conduit aux équations :

$$1=A_1-2A_2+4A_3-8B_1+8B_2,$$
$$0=2A_1-3A_2+4A_3+12B_1+20B_2,$$
$$1=A_1+4A_2-3A_3-6B_1+6B_2,$$
$$0=A_2-2A_3+B_1-\rho B_2,$$
$$0=B_2+A_3;$$

qui donnent $A_1=\frac{373}{665}$, $A_2=\frac{22}{665}$, $A_3=\frac{8}{665}$, $B_1=-\frac{46}{665}$, $B_2=-\frac{8}{665}$;

on a donc :

$$\frac{x^2+1}{(x-2)^3(x+1)^2}=\frac{373}{665(x-2)^3}+\frac{22}{665(x-2)^2}+\frac{8}{665(x-2)}-\frac{46}{665(x+1)^2}-\frac{8}{665(x+1)}.$$

2me Méthode.

Nous avons trouvé

$$\frac{fx}{(x-a)^\alpha F_1x}=\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_\alpha}{x-a}+K_\alpha+\frac{f_1x}{F_1x},$$

$Fx=(x-a)^\alpha F_1x$.

En multipliant ces deux équations, on trouve :

(1) $$fx=[A_1+(x-a)A_2+\ldots+(x-a)^{\alpha-1}A_\alpha]F_1x+K_\alpha(x-a)^2F_1x+f_1x(x-a)^\alpha.$$

En posant $x=a$, il vient :

$$fa=A_1\cdot F_1a.$$

Si nous différentions l'équation (1), $\alpha-1$ fois de suite, et que nous posions $x=a$, après les différentiations, on trouve

$$fa = A_1 \cdot F'_1 a + A_2 F_1 a,$$
$$f''a = A_1 \cdot F''_1 a + 2A_2 F'_1 a + 1 \cdot 2 A_3 F_1 a,$$
$$f'''a = A_1 \cdot F'''a + 3A_2 F''a + 3 \cdot 1 \cdot 2 A_3 F'_1 a + 1 \cdot 2 \cdot 3 A_4 F_1 a,$$

etc., etc.

De ces équations on tire les valeurs des inconnues

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \text{ etc.}$$

On aura évidemment des équations semblables pour déterminer les coëfficients B_1, B_2, B_3, etc., etc.

Exemple. Soit $\frac{fx}{Fx} = \frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)} =$

$$\frac{A_1}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x} + \frac{B_1}{(x-1)^2} + \frac{B_2}{x-1} + \frac{C_1}{x+1};$$

On aura :

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = -1.$$

$$F_1 x = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1,$$
$$F'_1 x = 3x^2 - 2x - 1,$$
$$F''_1 = 6x - 2.$$

Donc $F_1 a = 1$, $F'_1 a = -1$, $F''_1 a = -2$;
on a d'ailleurs $fa = 1$, $f'a = 0$, $f''a = 0$;
donc, les équations ci-dessus deviennent :

$$0 = A_1 \cdot 1,$$
$$0 = A_1(-1) + A_2 \cdot 1,$$
$$0 = A_1(-2) + 2A_2(-1) + 1 \cdot 2 A_3 \cdot 1;$$

d'où l'on tire :

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 2.$$

Pour déterminer les B, on fera

$$F_1 x = x^3(x+1) = x^4 + x^3,$$
$$F'_1 = 4x^3 + 3x^2;$$

comme $b = 1$, on a :

$$F_1(b) = 2, \quad F'_1(b) = 7, \quad f(b) = 1, \quad f'b = 0;$$

donc les équations ci-dessus deviennent :

$$1 = B_1 \cdot 2,$$
$$0 = B_1 \cdot 7 + B_2 \cdot 2;$$

d'où : $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = -\frac{7}{4}$.

On déterminera le coëfficient C_1, en observant que l'on a maintenant $c=-1$, $f(c)=1$,

$$F_1x=x^5(x-1)^2=x^5-2x^4+x^3,$$

$$F_1(c)=-4;$$

donc $$1=C_1(-4),\quad C_1=-\tfrac{1}{4}.$$

Donc enfin :

$$\frac{1}{x^3(x-1)^3(x+1)}=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{2(x-1)^3}-\frac{7}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}.$$

3me Méthode.

Soit $\varphi x=\dfrac{fx}{Fx}=\dfrac{fx}{(x-a)^\alpha F_1x}$, et posons $\psi x=(x-a)^\alpha\varphi x$, on aura :

$$\psi x=(x-a)^\alpha\varphi x=(x-a)^\alpha\left[\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_\alpha}{x-a}\right]+U(x-a)^\alpha$$

$$=A_1+A_2(x-a)+A_3(x-a)^2+\ldots+A_\alpha(x-a)^{\alpha-1}+U(x-a)^\alpha.$$

Changeons x en $z+a$, on aura :

$$\psi(z+a)=A_1+A_2z+A_3z^2+\ldots+A_\alpha z^{\alpha-1}+Uz^\alpha.$$

Mais on a aussi :

$$\psi(z+a)=\frac{f(z+a)}{F_1(z+a)}.$$

En effectuant la division, jusqu'aux α premiers termes du quotient inclusivement, on aura une expression de cette forme :

$$\psi(z+a)=a_1+a_2z+a_3z+\ldots+a_\alpha z^{\alpha-1}+U'z^\alpha.$$

En comparant ces deux expressions de la même fonction $\psi(z+a)$, on en déduit : $A_1=a_1$, $A_2=a_2$, $\ldots$ $A_\alpha=a_\alpha$.

On obtiendra les B, etc., les L par des procédés tout-à-fait semblables.

Exemple. Soit $\varphi x = \frac{fx}{Fx} = \frac{1+x^2}{(x-1)^3(x-2)^2(x+1)} =$

$$\frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{B_1}{(x-2)^2} + \frac{B_2}{x-2} + \frac{C_1}{x+1}.$$

1° *Déterminons les* A.

On a ici

$$\psi x = (x-1)^3 \varphi x = \frac{1+x^2}{(x-2)^2(x+1)}, \quad a=1.$$

Posons $x = z+1$, il viendra

$$\psi(z+a) = A_1 + A_2 z + A_3 z^2 + Uz^3. \qquad (1$$

D'un autre côté on a :

$$\psi(z+a) = \frac{1+(z+1)^2}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{2+2z+z^2}{2-3z+z^3} =$$

$$1 + \frac{5}{2}z + \frac{17}{4}z^2 + U'z^3. \qquad (2$$

La comparaison des seconds membres des équations (1 et (2, donnera :

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \frac{5}{2}, \quad A_3 = \frac{17}{4}.$$

2° *Déterminons les* B.

Nous avons ici :

$$\psi_1 x = (x-2)^2 \varphi x = \frac{1+x^2}{(x-1)^3(x+1)}, \quad b=2;$$

donc $$\psi_1(z+b) = B_1 + B_2 z + Vz^2. \qquad (1'$$

Ensuite, pour $x = z+2$, il vient aussi :

$$\psi_1(z+b) = \frac{1+(z+2)^2}{(z+1)^3(z+3)} = \frac{5+4z+z^2}{3+10z+12z^2+6z^3+z^4} =$$

$$\frac{5}{3} - \frac{38}{9}z + V'z^2. \qquad (2'$$

La comparaison des équations (1' et (2' donne :

$$B_1 = \frac{5}{3}, \quad B_2 = -\frac{38}{9}.$$

5° *Déterminer* c.

On fera $\psi_2 x = (x+1)\varphi x = \dfrac{1+}{(x-1)^2(x-2)^2}$, $c = -1$.

En changeant x en $z+c$ ou $z-1$, il vient

$$\psi_2(z+c) = C_1 + Wz. \qquad (1''$$

Mais on a aussi :

$$\psi_2(z+c) = \frac{1+(z-1)^2}{(z-2)^2(z-3)^2} =$$

$$\frac{2-2z+z^2}{-72+156z-134z^2+57z^3-12z^4+z^5} = -\frac{1}{36} + W'z. \qquad (2''$$

Les équations (1'' et (2'' donnent

$$C_1 = -\frac{1}{36}.$$

On a donc enfin :

$$\frac{1+x^2}{(x-1)^3(x-2)^2(x+1)} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{5}{2(x-1)^2} + \frac{17}{4(x-1)} + \frac{5}{3(x-2)^2} - \frac{38}{9(x-2)} - \frac{1}{36(x+1)}.$$

(b.) Cas particulier.

Quand on a $\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 1$, la formule générale devient :

$$\varphi x = \frac{fx}{Fx} = \frac{fx}{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}.$$

Les numérateurs A, B, ... L, seront alors déterminés par les équations

$$f(a) = A \cdot F_1 a, \quad f(b) = B \cdot F_2(b), \quad \ldots \quad f(l) = L \cdot F_n(l),$$

en posant successivement

$$F_1 x = (x-b)\ldots(x-l), \quad F_2 x = (x-a)(x-c)\ldots(x-l),$$
$$F_n x = (x-a)(x-b)\ldots(x-k).$$

Mais on a :

$$Fx = (x-a)F_1 x; \quad \text{donc} \quad F'x = F_1 x + (x-a)F'_1 x.$$

D'où, pour $x=a$, $F'a=F_1a$.

On a de même

$$Fx=(x-b)F_2x, \quad \text{donc} \quad F'x=F_2x+(x-b)F'_2x.$$

Pour $x=b$, on a $F'b=F_2b.$, etc.

On démontrera de même que l'on a $F'l=F_nl$. On a donc les équations :

$$f(a)=A\cdot F'a, \quad f(b)=B\cdot F'b, \ldots f(l)=L\cdot F'l, \quad \text{d'où :}$$

$$A=\frac{fa}{F'a}, \quad B=\frac{f(b)}{F'b}, \ldots \quad L=\frac{f(l)}{F'l}.$$

Exemple. Soit $\varphi x=\dfrac{fx}{Fx}=\dfrac{1+x}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}=$

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}.$$

On a ici :

$$a=1, \ b=-1, \ c=2, \ d=-2,$$

$$fx=1+x, \ Fx=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=x^4-5x^2+4,$$

$$F'x=4x^3-10x.$$

$$fa=2, \ fb=0, \ fc=3, \ fd=-1;$$

$$F'a=-6, \ F'b=6, \ F'c=12, \ F'd=-12.$$

Donc $A=\dfrac{fa}{F'a}=-\dfrac{2}{6}=-\dfrac{1}{3}$, $B=\dfrac{f(b)}{F'(b)}=0$,

$$C=\frac{fc}{F'c}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}, \quad D=\frac{fd}{F'd}=\frac{1}{12}.$$

On a, par conséquent :

$$\frac{1+x}{x^4-5x^2+4}=-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{4(x-2)}+\frac{1}{12(x+2)}.$$

(c.) Cas des Facteurs imaginaires.

Si les facteurs du dénominateur Fx sont en partie imaginaires, alors deux facteurs imaginaires conjugués répondent à deux fractions partielles de la forme

$$\frac{A}{(x-a+b\sqrt{-1})^m}+\frac{B}{(x-a-b\sqrt{-1})^m}.$$

Les numérateurs A et B, déterminés par l'une des trois Méthodes seront également de la forme imaginaire $P+Q\sqrt{-1}$, mais en ajoutant ces deux fractions, les termes affectés de $\sqrt{-1}$ disparaîtront de la somme, et l'expression

$$\frac{A(x-a-b\sqrt{-1})^m+B(x-a+b\sqrt{-1})^m}{[(x-a)^2+b^2]^m},$$

sera réelle.

1^er^ *Exemple.* Soit $\varphi x=\frac{fx}{Fx}=\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5}=$

$$\frac{7x-3}{(x+1)(x-2-\sqrt{-1})(x-2+\sqrt{-1})}$$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2-\sqrt{-1}}+\frac{C}{x-2+\sqrt{-1}}.$$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{(B+C)x-2(B+C)+(B-C)\sqrt{-1}}{(x-2)^2+1}.$$

On a $a=-1$, $b=2+\sqrt{-1}$, $c=2-\sqrt{-1}$,

$fx=7x-3$, $Fx=x^3-3x^2+x+5$, $F'x=3x^2-6x+1$,

$fa=-10$, $f(b)=11+7\sqrt{-1}$, $fc=11-7\sqrt{-1}$,

$F'a=10$, $F'b=6\sqrt{-1}-2$, $F'c=-6\sqrt{-1}-2$;

$$A=\frac{fa}{F'a}=-1, \quad B=\frac{fb}{F'b}=\frac{11+7\sqrt{-1}}{6\sqrt{-1}-2},$$

$$C=\frac{fc}{F'c}=\frac{11-7\sqrt{-1}}{-6\sqrt{-1}-2};$$

donc $B+C=1$, $B-C=-2\sqrt{-1}$;

donc enfin : $\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5}=-\frac{1}{x-1}+$

$$\frac{11+7\sqrt{-1}}{6\sqrt{-1}-2}\cdot\frac{1}{x-2-\sqrt{-1}}+\frac{11-7\sqrt{-1}}{-6\sqrt{-1}-2}\cdot\frac{1}{x-2+\sqrt{-1}},$$

ou : $$\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5}=-\frac{1}{x+1}+\frac{x}{(x-2)^2+1}.$$

2^me *Exemple.* Décomposer la fraction $\frac{x^{m-1}}{x^n-1}$, $m-1<n$.

1° n *est pair.*

Soit pour abréger $\frac{\pi}{n}=\theta$, $a_k=e^{k\theta\sqrt{-1}}=\cos k\theta+\sqrt{-1}\sin k\theta$,

$b_k=e^{-k\theta\sqrt{-1}}=\cos k\theta-\sqrt{-1}\sin k\theta$.

Désignons par $\prod_{2,4}^{n-2}{}_k(fk)$, le produit

$$\prod_{2,4}^{n-2}{}_k f(k)=f(2)\cdot f(4)\ldots f(n-2).$$

Il est clair que les facteurs de x^n-1, seront :

$$x^n-1=(x-1)(x+1)\prod_{2,4}^{n-2}{}_k(x-a_k)(x-b_k),$$

et l'on aura :

$$\frac{fx}{Fx}=\frac{x^{m-1}}{x^n-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\sum_{2,4}^{n-2}{}_k\left[\frac{C_k}{x-a_k}+\frac{D_k}{x-b_k}\right].$$

La somme $\sum_{2,4}^{n-2}{}_k f(k)=f(2)+f(4)+\ldots+f(n-2)$.

Il faut donc déterminer les coëfficients A, B, C_k, D_k. Mais on a ici $a=1$, $b=-1$, $fx=x^{m-1}$, $F'x=nx^{n-1}$;

donc $f(a)=1$, $f(b)=(-1)^{m-1}$, $f(a_k)=e^{k(m-1)\theta\sqrt{-1}}$,

$f(b_k)=e^{-k(m-1)\theta\sqrt{-1}}$,

$F'(a)=n$, $F'(b)=n(-1)^{n-1}$.

$F'(a_k)=ne^{(n-1)k\theta\sqrt{-1}}$, $F'(b_k)=ne^{-(n-1)k\theta\sqrt{-1}}$.

Donc $A=\frac{fa}{F'a}=\frac{1}{n}$, $B=\frac{fb}{F'b}=\frac{(-1)^{m-1}}{n(-1)^{n-1}}=\frac{(-1)^{m-n}}{n}=\frac{(-1)^m}{n}$, n étant pair.

On a de même :

$$C_k = \frac{f(a_k)}{F'(a_k)} = \frac{1}{n} e^{k(m-n)\theta\sqrt{-1}} = \frac{1}{n} e^{km\theta\sqrt{-1}} : e^{k\pi\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{1}{n} e^{km\theta\sqrt{-1}}, \; k \text{ étant pair.}$$

$$D_k = \frac{f(b_k)}{F'(b_k)} = \frac{1}{n} e^{-k(m-n)\theta\sqrt{-1}} = \frac{1}{n} e^{-km\theta\sqrt{-1}} : e^{-k\pi\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{1}{n} e^{-km\theta\sqrt{-1}}, \; k \text{ étant pair.}$$

On a par conséquent :

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-1} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{x-1} + \frac{(-1)^m}{x+1} + \right.$$

$$\left. \sum_{2,4}^{n-2} k \left[\frac{e^{km\theta\sqrt{-1}}}{x - e^{k\theta\sqrt{-1}}} + \frac{e^{-km\theta\sqrt{-1}}}{x - e^{-k\theta\sqrt{-1}}} \right] \right.$$

Si l'on veut faire disparaître les termes imaginaires il faudra ajouter les deux fractions sous le signe $\sum$, dont la somme est :

$$\frac{e^{km\theta\sqrt{-1}}}{x - e^{k\theta\sqrt{-1}}} + \frac{e^{-km\theta\sqrt{-1}}}{x - e^{-k\theta\sqrt{-1}}} =$$

$$\frac{x\left(e^{km\theta\sqrt{-1}} + e^{-km\theta\sqrt{-1}}\right) - \left(e^{(m-1)k\theta\sqrt{-1}} + e^{-(m-1)k\theta\sqrt{-1}}\right)}{x^2 - x\left(e^{k\theta\sqrt{-1}} + e^{-k\theta\sqrt{-1}}\right) + 1}.$$

Mais, comme on a généralement

$$e^{p\sqrt{-1}} + e^{-p\sqrt{-1}} = 2\cos p,$$

la somme ci-dessus deviendra

$$2 \cdot \frac{x\cos km\theta - \cos(m-1)k\theta}{x^2 - 2x\cos k\theta + 1},$$

et par conséquent on a :

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-1} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{x-1} + \frac{(-1)^m}{x+1} + \right.$$

$$\left. 2\sum_{2,4}^{n-2} k \left[\frac{x\cos km\theta - \cos(m-1)k\theta}{x^2 - 2x\cos k\theta + 1} \right] \right\}. \quad (a)$$

2° n *est impair.*

On a alors

$$x^n-1=(x-1)\prod_{2,4\,k}^{n-1}(x-a_k)(x-b_k);$$

par conséquent, dans le cas de n impair, l'on a :

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-1}=\frac{A}{x-1}+\sum_{2,4\,k}^{n-1}\left\{\frac{C_k}{x-a_k}+\frac{D_k}{x-b_k}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{x-1}+2\sum_{2,4\,k}^{n-1}\left[\frac{x\cos km\theta-\cos(m-1)k\theta}{x^2-2x\cos k\theta+1}\right]\right\}. \qquad (b)$$

3me *Exemple.* Décomposer $\frac{fx}{Fx}=\frac{x^{m-1}}{x^n+1}$, $m-1<n$.

1° *Quand* n *est pair.*

Dans ce cas on a :

$x^n+1=\prod_{1,3\,k}^{n-1}[(x-a_k)(x-b_k)]$, en faisant en général,

$$\prod_{1,3\,k}^{n-1}f(k)=f(1)\cdot f(3)\cdot f(5)\ldots f(x-1).$$

On a donc

$$\frac{x^{m-1}}{x^n+1}=\sum_{1,3\,k}^{n-1}\left[\frac{C_k}{x-a_k}+\frac{D_k}{x-b_k}\right].$$

Mais on a :

$$C_k=\frac{1}{n}e^{(m-n)k\theta\sqrt{-1}}=\frac{1}{n}e^{mk\theta\sqrt{-1}}:(e^{\pi\sqrt{-1}})^k$$

$$=\frac{1}{n}e^{mk\sqrt{-1}}:-1,\ k \text{ étant impair},$$

$$D_k=\frac{1}{n}e^{-(m-n)k\theta\sqrt{-1}}=\frac{1}{n}e^{-mk\theta\sqrt{-1}}\cdot(e^{\pi\sqrt{-1}})^k$$

$$=\frac{1}{n}e^{-mk\theta\sqrt{-1}}\times-1;$$

donc :

$$\frac{x^{m-1}}{x^n+1} = +\frac{2}{n}\sum_{1,3}^{n-1}{}_k\left\{\frac{\cos(m-1)k\theta - x\cos mk\theta}{x^2-2x\cos k\theta+1}\right\}. \qquad (c)$$

2° n *est impair.*

On a alors

$$x^n+1 = (x+1)\cdot\prod_{1,3}^{n-2}{}_k\left[(x-a_k)(x-b_k)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\frac{(-1)^{m-1}}{x+1} + 2\sum_{1,3}^{n-2}{}_k\left[\frac{\cos(m-1)k\theta - x\cos m\theta)}{x^2-2x\cos k\theta+1}\right]\right\}. \qquad (d)$$

§ 57.

Formule d'interpolation de Lagrange.

(a) **Cas où fx est une fonction entière et rationnelle.**

Théorème. fx *étant une fonction entière et rationnelle*, fa, fb,... fl, n *valeurs particulières de cette fonction, correspondantes aux* n valeurs de x, *savoir :*

$$x = a,\ b,\ \cdot k,\ l,$$

je dis que l'on aura :

$$fx = fa\cdot\frac{(x-b)(x-c)\ldots(x-l)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} + fb\cdot\frac{(x-a)(x-c)\ldots(x-l)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)}$$
$$+\ldots+ fl\cdot\frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)}.$$

Démonstration. Soient fx, Fx des polynomes entiers et rationnels, et soit

$$Fx = (x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

en supposant de plus que la fraction $\frac{fx}{Fx}$ ne renferme pas d'entiers, on aura, par la théorie du § précédent :

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{fa}{F'a}\cdot\frac{1}{x-a} + \frac{fb}{F'b}\cdot\frac{1}{x-b} +\ldots+ \frac{fl}{F'l}\cdot\frac{1}{x-l}.$$

Mais on a

$$(1) \qquad Fx = (x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l);$$

donc, en multipliant ces deux équations membre à membre, on trouve

$$(2) \quad fx = fa \cdot \frac{(x-b)(x-c)\ldots(x-l)}{F'a} + fb \cdot \frac{(x-a)(x-c)\ldots(x-l)}{F'b} + \ldots + fl \cdot \frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)}{F'l}.$$

Mais, en différentiant l'équation (1), on a :

$$F'x = (x-b)(x-c)\ldots(x-l) + (x-a)(x-c)\ldots(x-l) + \ldots + (x-a)(x-b)\ldots(x-k);$$

on a donc

$$F'a = (a-b)(a-c)\ldots(a-l),$$
$$F'b = (b-a)(b-c)\ldots(b-l),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F'l = (l-a)(l'-b)\ldots(l-k).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (2), on a la formule cherchée, qui est de la forme

$$fx = A(x-b)(x-c)\ldots(x-l) + B(x-a)(x-c)\ldots(x-l) + \ldots + L(x-a)(x-b)\ldots(x-k).$$

Exemple. Soit $fx = x^3 + px + q = 0$, et α une racine réelle de cette équation, comprise entre λ et μ, dont on demande une valeur approchée. A cet effet, prenons entre λ et μ des valeurs intermédiaires, par exemple, les trois nombres

$$\lambda < a < b < c < \mu,$$

et soient

$$fa = c_1,$$
$$fb = c_2,$$
$$fc = c_3;$$

on pourra poser

$$a = \varphi(c_1), \quad b = \varphi(c_2), \quad c = \varphi(c_3).$$

De plus l'équation $f\alpha = 0$, nous donnera $\alpha = \varphi(0)$.

On a donc, par la formule de Lagrange :

$$\varphi(0) = \frac{(0-c_2)(0-c_3)}{(c_1-c_2)(c_1-c_3)} \cdot \varphi(c_1) + \frac{(0-c_1)(0-c_3)}{(c_2-c_1)(c_2-c_3)} \cdot \varphi(c_2) + \frac{(0-c_1)(0-c_2)}{(c_3-c_1)(c_3-c_2)} \varphi(c_3),$$

ou : $$\alpha = \frac{c_2 \cdot c_3}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)} \cdot a + \frac{c_1 \cdot c_3}{(c_2 - c_1)(c_2 - c_3)} \cdot b + \frac{c_1 \cdot c_2}{(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)} \cdot c.$$

THÉORÈME. fx *étant une fonction continue quelconque dont on donne* n *valeurs* $fa, fb, \ldots fl$, *correspondantes aux* n *valeurs de* x, *savoir*, $x = a, b, \ldots l$, *je dis que l'on aura :*

$$fx = \frac{(x-b)(x-c)\ldots(x-l)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} \cdot fa + \frac{(x-a)(x-c)\ldots(x-l)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)} \cdot fb + \ldots + \frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)} f(l) + R,$$

$$R = \frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot f^{(n)}(\varepsilon_1 a + \varepsilon_{+1} b \ldots + \varepsilon_{n+1} x),$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n+1} = 1, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1, \quad 0 < \varepsilon_2 < 1, \ldots 0 < \varepsilon_{n+1} < 1.$$

Démonstration. 1° Je dis d'abord que l'on a

$$\frac{fa}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} + \frac{fb}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)} + \ldots + \frac{f(l)}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n-1} f^{(n-1)} \left\{ \varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \ldots + \varepsilon_n l \right\}, \quad \text{(I)}$$

$$0 < \varepsilon_1 < 1, \; 0 < \varepsilon_2 < 1, \; \ldots < \varepsilon_n < 1, \text{ et } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n = 1.$$

En effet, on a, par une formule des notions préliminaires,

$$fb - fa = (b-a) f'[a + \varepsilon_2(b-a)], \qquad 0\varepsilon < \varepsilon_2 < 1$$
$$= (b-a) f'[(1-\varepsilon_2) a + \varepsilon_2 b],$$
$$= (b-a) f'[\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b]. \quad 0 < \varepsilon_1 < 1, \; \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1.$$

On en tire

$$\frac{fa}{a-b} + \frac{fb}{b-a} = f'(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b).$$

Donc l'équation (I) subsiste pour $n = 2$. Je dis maintenant que si la relation (I) a lieu pour n lettres $a, b, \ldots l$, elle subsistera encore pour $n+1$ lettres $a, b, \ldots l, m$.

Pour cela, remplaçons dans (I)

fa par $\frac{fa - fm}{a - m}$, fb par $\frac{fb - fm}{b - m}$, etc., fl par $\frac{fl - fm}{l - m}$,

On aura l'équation suivante :

$$\frac{fa-fm}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)(a-m)}+\frac{fb-fm}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)(b-m)}+\ldots$$

$$+\frac{fl-fm}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)(l-m)}=\frac{1}{1\cdot2\ldots n-1}\cdot\frac{d^{n-1}\left[\frac{fz-fm}{z-m}\right]}{dz^{n-1}},\quad\text{(II)}$$

pourvu que l'on pose $z=\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\ldots+\varepsilon_n l$ après les différentiations.

Mais par la formule qui donne le développement de $\frac{d^p[\varphi z\cdot\psi z]}{dz^p}$, on aura, pour $p=n-1$, $\varphi z=fz-fm$, $\psi z=\frac{1}{z-m}$, l'expression suivante

$$\frac{d^{n-1}\left[\frac{fz-fm}{z-m}\right]}{dz^{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}z}{z-m}-(n-1)\frac{f^{(n-2)}z}{(z-m)^2}+$$

$$(n-1)(n-2)\frac{f^{(n-3)}z}{(z-m)^3}-\text{etc.}+(-1)^{n-1}.1.2\ldots(n-1)\frac{fz-fm}{(z-m)^n}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}1\cdot2\ldots(n-1)}{(z-m)^n}\left\{fz-m-(z-m)f'z+\frac{(z-m)^2}{1\cdot2}f''z-\text{etc.}\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{(z-m)^{n-1}}{1\cdot2\ldots n-1}f^{(n-1)}z\right\}.$$

Mais l'on sait, par la formule générale de Maclaurin, que le polynome, qui est placé dans les accolades, peut être remplacé par le reste

$$\frac{(-1)^{n-1}(z-m)^n_1}{1\cdot2\ldots n}f^{(n)}[z+\varepsilon(m-z)],\quad 0<\varepsilon<1.$$

ou par

$$(-1)^{n-1}\frac{(z-m)^n}{1\cdot2\ldots n}f^{(n)}[\varepsilon' z+\varepsilon m],\quad \varepsilon+\varepsilon'=1,\ 0<\varepsilon<1,\ 0<\varepsilon'<1.$$

On a donc :

$$\frac{1}{1\cdot2\ldots n-1}\cdot\frac{d^{n-1}\left[\frac{fz-fm}{z-m}\right]}{dz^{n-1}}=\frac{1}{1\cdot2\ldots n}f^{(n)}(\varepsilon' z+\varepsilon m),$$

équation dans laquelle il faut faire $z=\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\ldots+\varepsilon_n l$. Mais dans l'expression

$$\varepsilon'[\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\ldots\varepsilon_n l]+\varepsilon m$$

les coëfficients $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ sont compris entre 0 et 1, et l'on a

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n=1, \quad \text{et aussi} \quad \varepsilon'+\varepsilon=1,$$

on peut donc poser

$$\frac{1}{1\cdot2\ldots n-1}\cdot\frac{d^{n-1}\left[\frac{fz-fm}{z-m}\right]}{dz^{n-1}}=\frac{1}{1\cdot2\ldots n}f^{(n)}[\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\ldots+\varepsilon_{n+1}m]$$

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n+1}=1, \quad 0<\varepsilon_1<1, \quad 0<\varepsilon_2<1, \ldots 0<\varepsilon_{n+1}<1.$$

Réduisons maintenant le 1er membre de l'équation (II) à sa forme la plus simple. A cet effet, si dans la formule

$$fx=\frac{(x-b)(x-c)\ldots(x-l)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}fa+\ldots+\frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)}fl,$$

on pose $fx=1$, $x=m$, on a :

$$1=\frac{(m-b)(m-c)\ldots(m-l)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}+\frac{(m-a)(m-c)\ldots(m-l)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)}+\ldots+\frac{(m-a)(m-b)\ldots(m-k)}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)}.$$

Divisons cette égalité par $(m-a)(m-b)\ldots(m-l)$, on trouve

$$\frac{1}{(m-a)(m-b)\ldots(m-l)}=-\frac{1}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)(a-m)}-\frac{1}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)(b-m)}-\ldots-\frac{1}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)(l-m)};$$

c'est le coëfficient de $f(m)$ dans le 1er membre de l'équation (II), donc cette équation devient :

$$\frac{fa}{(a-b)(a-c)\ldots(a-m)}+\frac{fb}{(b-a)(b-c)\ldots(b-m)}+\ldots+\frac{fm}{(m-a)(m-b)\ldots(m-l)}=\frac{1}{1\cdot2\ldots n}f^{(n)}[\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\ldots+\varepsilon_{n+1}m];$$

et l'on voit qu'elle est de la même forme que l'équation (I). Or, l'équation (I) ayant lieu pour 2 lettres, elle subsistera lorsqu'il y en aura 3, 4, etc.

Multiplions maintenant l'équation précédente par

$$(m-a)\,(m-b)\ldots(m-l),$$

nous aurons :

$$fm - \frac{(m-b)(m-c)\dots(m-l)}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)} \cdot fa - \frac{(m-a)(m-c)\dots(m-l)}{(b-a)(b-c)\dots(b-l)} \cdot fb -$$

$$\text{etc.} - \frac{(m-a)(m-b)\dots(m-k)}{(l-a)(l-b)\dots(l-k)} fl =$$

$$\frac{(m-a)(m-b)\dots(m-k)(m-l)}{1.2\dots n} \cdot f^{(n)}(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \dots + \varepsilon_{(+1)} m).$$

Si nous remplaçons dans celle-ci m par x, et si nous mettons tous les termes fractionnaires au second membre, on aura la valeur de fx énoncée dans le théorème.

Remarque. En négligeant le reste R, l'évaluation obtenue pour fx sera fautive de R.

Soit $$M = \varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \dots + \varepsilon_{n+1} x,$$

M sera une moyenne entre les quantités $a, b, .l, x$; si A et B désignent le maximum et le minimum de $f^{(n)}(M)$, on aura

$$A > f^{(n)}(M) > B,$$

ou $$f^{(n)}(\alpha) > f^{(n)}(M) > f^{(n)}(\beta),$$

α et β étant les valeurs de M qui rendent $f^{(n)}(M)$ un maximum et un minimum.

Il suit de là, qu'en négligeant le reste R, on commet une erreur comprise entre les deux limites

$$\frac{(x-a)(x-b)\dots(x-l)}{1.2\dots n} f^{(n)}(\alpha), \text{ et } \frac{(x-a)(x-b)\dots(x-l)}{1.2\dots n} f^{(n)}(\beta).$$

On peut donc négliger le reste R, quand ces limites sont très-rapprochées, ou quand elles sont assez petites pour n'exercer aucune influence sur la valeur de fx, entre les limites de la précision désirée.

§ 38.

Équations numériques.

(a) Théorème de Fourier.

Stern, Journ. de Crelle, t. x et xi.

Notations et définitions. Soit $fx = 0$ une équation algébrique du degré m, si l'on forme les m dérivées consécutives

$$f^{(m)}x, f^{(m-1)}x, \dots f''x, f'x, fx, \qquad (a)$$

et qu'on remplace, dans chacune, x par un nombre a, les résultats

$$f^{(m)}a,\ f^{(m-1)},\ \ldots\ f''a,\ f'a,\ fa$$

seront des valeurs positives ou négatives, qui présenteront une succession de signes telle que

$$-,\ +,\ \ldots\ -,\ -,\ +,$$

que nous désignerons, par $[a]$.

Deux signes consécutifs égaux se nomment une *permanence*, et deux signes consécutifs inégaux donnent lieu à une *variation* de signes. Ainsi dans la série de signes

$$[a] = - + + - - - + ,$$

il y a trois permanences, savoir $(+\,+)$, $(-\,-)$, $(-\,-)$, et trois variations, savoir $(-\,+)$, $(+\,-)$, $(-\,+)$.

Les démonstrations des propositions qui vont suivre reposent sur un principe déjà démontré, et que nous allons rappeler :

PRINCIPE. *On peut concevoir* h *assez petit pour que le signe du binôme*

$$f(a) + h\cdot\varphi(a),$$

soit le même que celui de son 1^er^ Terme $f(a)$.

1^er^ LEMME. *Si dans les dérivées consécutives*

$$f^{(m)}x,\ f^{(m-1)}x,\ f'x,\ fx$$

on remplace x *successivement par* $-\frac{1}{0}$ *et* $+\frac{1}{0}$, *on obtiendra deux séries de signes que nous indiquerons par* $[-\frac{1}{0}]$, $[\frac{1}{0}]$, *or, je dis que la 1^re^ Série ne sera composée que de variations et que la seconde ne renfermera que des permanences de signes.*

Démonstration. Soit

$$fx = Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

on trouve :

$$f^{(m)}x = 1\cdot 2\ldots m\,A,$$

$$f^{(m-1)}x = 2\cdot 3\ldots m\,Ax + 1\cdot 2\ldots(m-1)\,A_1,$$

$$f^{(m-2)}x = 3\cdot 4\ldots m\,Ax^2 + 2\cdot 3\ldots(m-1)\,A_1x + 1\cdot 2\ldots(m-2)\,A_2,$$

etc., etc.

1° Posons $x = -\frac{1}{0}$, on aura la suite de signes

$$f^{(m)}(-\tfrac{1}{0}) = +,\ f^{(m-1)}(-\tfrac{1}{0}) = -,\ f^{(m-2)}(-\tfrac{1}{0}) = +,\ \text{etc.},$$

ou

$$[-\tfrac{1}{0}] = +, -, +, \text{etc.}$$

C'est-à-dire, les signes de cette série seront alternativement positifs et négatifs, ce qui ne produira que des variations de signe.

2° Posons $x = +\frac{1}{0}$, on aura la suite de signes

$$f^{(m)}(\tfrac{1}{0}) = +,\ f^{(m-1)}(\tfrac{1}{0}) = +,\ f^{(m-2)}(\tfrac{1}{0}) = +,\ \text{etc.};$$

donc la série

$$[\tfrac{1}{0}] = +, +, +, \ldots.$$

ne se compose que de permanences.

Donc si a est un nombre réel, et par conséquent compris entre $-\frac{1}{0}$ et $+\frac{1}{0}$, et qu'il ne fasse évanouir aucun terme de la suite

$$f^{(m)}a,\ f^{(m-1)}a,\ f^{(m-2)}a, \ldots f'a, fa, \qquad (1)$$

la série de signe $[a]$ sera la même que la série $[-\frac{1}{0}]$, et n'offrira que des variations.

Il n'en sera plus de même si a rend nul l'un des termes de la suite (1), comme nous le verrons par les lemmes suivants.

2^me^ Lemme. *Si* a *est une racine de l'équation* $fx = 0$, *et que l'on a par conséquent* $fa = 0$, *je dis que l'on pourra concevoir* h *assez petit, pour que la suite de signes* $[a+h]$, *ait une variation de moins que la suite* $[a-h]$.

Démonstration. On a par le théorème de Taylor :

$$f^{(m)}[a-h] = f^{(m)}a - h f^{(m+1)}(a+\varepsilon_1 h),$$
$$f^{(m-1)}(a-h) = f^{(m-1)}a - h f^{(m)}(a+\varepsilon_2 h),$$
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
$$f'(a-h) = f'a - h f''(a+\varepsilon_{m-1}h),$$
$$f(a-h) = 0 - h[f'a + \frac{h}{1\cdot 2} f''(a+\varepsilon_m h)].$$

Donc, en vertu du Principe ci-dessus, les signes de

$$f^{(m)}(a-h),\ f^{(m-1)}(a-h), \ldots f'(a-h)$$

seront les mêmes que ceux de la suite

$$f^{(m)}a,\ f^{(m-1)}a,\ \ldots\ f'a,$$

désignons les signes de la suite $f^{(m)}a,\ldots f'a$, par $\{a\}$.

L'on voit encore que $f(a-h)$ sera positif ou négatif, selon que $f'a$ sera négatif ou positif, puisque le signe du binôme

$$f'a+\frac{h}{1\cdot 2}f''(a+\varepsilon_n h),$$

dépend de celui de $f'a$.

Donc, 1° si $f'a$ est positif, on aura

$$[a-h]=\{a\},\ +,\ -,$$

2° Si $f'a$ est négatif, on aura

$$[a-h]=\{a\},\ -,\ +.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
&f^{(m)}(a+h)=f^{(m)}a+hf^{(m+1)}(a+\varepsilon_1 h),\\
&f^{(m-1)}(a+h)=f^{(m-1)}a+hf^{(m)}(a+\varepsilon_2 h),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f'(a+h)=f'a+hf''(a+\varepsilon_{m-1}h),\\
&f(a+h)=0+h[f'a+\frac{h}{1\cdot 2}f''(a+\varepsilon_m h)].
\end{aligned}$$

Les termes $f^{(m)}(a+h),\ f^{(m-1)}(a+h)\ldots f''(a+h),\ f'(a+h)$, ont donc les signes des termes correspondants

$$f^{(m)}a,\ f^{(m-1)}a,\ \ldots\ f''a,\ f'a.$$

Soit $\{a\}$ la série des signes de la suite $f^{(m)}a,\ f^{(m-1)}a,\ldots f''a$.

Si $f'a$ est positif, alors en vertu du principe cité ci-dessus, $f'(a+h)$ et $f(a+h)$ seront positifs, et si $f'a$ est négatif, ces mêmes termes seront pareillement négatifs. Donc 1° si $f'a$ est positif, on a

$$[a+h]=\{a\},\ +,\ +,$$

et 2° si $f'a$ est négatif, on a

$$[a+h]=\{a\},\ -,\ -.$$

L'on voit donc que $[a+h]$, a une variation de moins que $[a-h]$.

3^me^ Lemme. *Si* a *n'est pas racine de l'équation* $fx=0$, *et si* $x=a$, *fait disparaître une ou plusieurs des dérivées*

$$f^{(m)}x,\ f^{(m-1)}x,\ \ldots\ f''x,\ f'x,$$

je dis que $[a+h]$ *aura un nombre pair de variations de moins que* $[a-h]$.

Démonstration. Soit la suite

$$f^{(m)}x,\ f^{(m-1)}x,\ldots\ f^{n+1}x,\ [f^{(n)}x,\ f^{(n-1)}x,\ \ldots\ f^{(n-l+1)}x],$$
$$f^{(n-l)}x,\ \ldots\ f''x,\ f'x,\ fx,$$

dans laquelle les l dérivées

$$f^{(n)}x,\ f^{n-1}x,\ \ldots\ f^{(n-l+1)}x$$

s'évanouissent pour $x=a$.

Les signes des fonctions

$$f^{(m)}[a\pm h],\ f^{(m-1)}[a\pm h],\ \text{etc.}\ f^{(n+1)}[a\pm h],$$
$$f^{(n-l)}(a\pm h),\ \ldots\ f'(a\pm h),\ f(a\pm h),$$

sont les mêmes que ceux des fonctions

$$f^{(m)}a,\ f^{(m-1)}a,\ \ldots f^{(n+1)}a,\ f^{(n-l)}a,\ \ldots f'a,\ fa;$$

donc, on n'a besoin que de considérer les signes des fonctions

$$f^{(n)}(a\pm h),\ f^{(n-1)}(a\pm h),\ \ldots f^{(n-l+1)}(a\pm h).$$

Nous désignerons par $\{a\}$ les signes des fonctions

$$f^{(m)}(a\pm h),\ f^{(m-1)}(a\pm h),\ \ldots f^{(n+1)}(a\pm h),$$

et par (a) ceux des fonctions

$$f^{(n-l)}(a\pm h),\ \ldots f'(a\pm h),\ f(a\pm h).$$

Cela posé, à cause de

$$f^{(n)}a=0,\ f^{(n-1)}a=0,\ \ldots\ f^{(n-l+1)}a=0,$$

le théorème de Taylor donne :

$$
\left.\begin{aligned}
&f^{(n+1)}[a-h] = f^{(n+1)}a - h f^{(n+2)}(a-\varepsilon_1 h),\\
&f^{(n)}[a-h] = 0 - h\left[f^{(n+1)}a - \frac{h}{1\cdot 2} f^{(n+2)}(a-\varepsilon_2 h)\right],\\
&f^{(n-1)}[a-h] = \frac{h^2}{1\cdot 2}\left[f^{(n+1)}a - \frac{h}{3} f^{(n+2)}(a-\varepsilon_3 h)\right],\\
&f^{(n-2)}[a-h] = -\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left[f^{(n+1)}a - \frac{h}{4} f^{(n+2)}(a-\varepsilon_3 h)\right],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f^{(n-l+2)}[a-h] = (-1)^{(l-1)}\frac{h^{l-1}}{1\cdot 2\ldots l-1}\left[f^{(n+1)}a - \frac{h}{l} f^{(n+2)}(a-\varepsilon_{l-2} h)\right],\\
&f^{(n-l+1)}[a-h] = (-1)^l \frac{h^l}{1\cdot 2\ldots l}\left[f^{(n+1)}a - \frac{h}{l+1} f^{(n-2)}(a-\varepsilon_{l-1} h)\right].
\end{aligned}\right\} (d)
$$

On a de même :

$$
\left.\begin{aligned}
&f^{(n+1)}[a+h] = f^{(n+1)}a + h f^{(n+2)}(a+\varepsilon_1 h),\\
&f^{(n)}[a+h] = +h\left[f^{(n+1)}a + \frac{h}{2} f^{(n+2)}(a+\varepsilon_2 h)\right],\\
&f^{(n-1)}[a+h] = +\frac{h^2}{1\cdot 2}\left[f^{(n+1)}a + \frac{h}{3} f^{(n+2)}(a+\varepsilon_3 h)\right],\\
&f^{(n-2)}[a+h] = +\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left[f^{(n+1)}a + \frac{h}{4} f^{(n+2)}(a+\varepsilon_4 h)\right],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f^{(n-l+2)}[a+h] = \frac{h^{l-1}}{1\cdot 2\ldots l-1}\left[f^{(n+1)}a + \frac{h}{l} f^{(n+2)}(a+\varepsilon_{l-2} h)\right],\\
&f^{(n-l+1)}[a+h] = \frac{h^l}{1\cdot 2\ldots l}\left[f^{(n+1)}a + \frac{h}{l+1} f^{(n+2)}(a+\varepsilon_{l-1} h)\right].
\end{aligned}\right\} (\beta)
$$

Il nous faut maintenant distinguer deux cas, selon que l est pair ou impair.

1° l *est pair*, *et* $f^{(n+1)}a > 0$,

alors les termes de la série (d) auront les signes suivants :

$$+, -, +, -, \ldots. -, +$$

et ceux de la série (β) seront

$$+, +, +, +, \ldots. +, +;$$

on a donc

$$[a-h] = \{a\}, +, -, +, -, \ldots -, +, (a)$$

$[a+h] = \{a\}, +, +, +, +, \ldots + , +, (a)$.

Si l'on avait $f^{(n+1)}a < 0$, l étant pair, l'on voit aisément que l'on aurait

$[a-h] = \{a\}, -, +, -, +, \ldots + , -, (a)$

$[a+h] = \{a\}, -, -, -, -, \ldots - , -, (a)$.

Donc $[a+h]$ a l variations de moins que $[a-h]$.

2° l *est impair.*

α) Soit $f^{(n+1)}a > 0$ et $f^{(n-l)}a > 0$,

alors les polynomes

(1) $f^{(n+1)}(a-h), f^{(n)}(a-h), \ldots f^{(n-l)}(a-h), f^{(n-2)}(a-h), \ldots$
$f^{(n-l+2)}(a-h), f^{(n-l+1)}(a-h), f^{(n-l)}(a-h)$,

auront respectivement les signes

$$+, -, +, -, \ldots + , -, +$$

tandis que les polynomes

(2) $f^{(n+1)}(a+h), f^{(n)}(a+h) \ldots . f^{(n-l+1)}(a+h), f^{(n-l)}(a+h)$

auront les signes

$$+, +, +, +, \ldots + , +, +,$$

Il suit de là, que l'on aura les successions de signes

$[a-h] = \{a\}, + - + - \ldots + - +, (a-1)$,

$[a+h] = \{a\}, + + + + \ldots + + +, (a-1)$.

β) Soit $f^{(n+1)}a < 0$ et $f^{(n-l)}a < 0$.

Les successions des suites (1) et (2) seront alors respectivement

$$- + - \ldots\ldots - + -$$
$$- - - \ldots\ldots - - -.$$

En sorte que l'on aura :

$[a-h] = \{a\}, - + - \ldots\ldots - + -, (a-1)$,

$[a+h] = \{a\}, - - - \ldots\ldots - - -, (a-1)$.

γ) Soient $f^{(n+1)}a > 0$, $f^{(n-l)}a < 0$,

les suites des signes des termes des séries (1) et (2) seront :

$$+ - + \ldots\ldots\ldots + - -,$$
$$+ + + \ldots\ldots\ldots + + -,$$

et l'on aura :

$[a-h] = \{a\} + - + \ldots\ldots + - -, (a-1)$,

$[a+h] = \{a\} + + + \ldots\ldots + + -$, $(a-1)$.

3°) Soit enfin $f^{(n+1)}a < 0$, $f^{(n-1)}a > 0$,

les suites (1) et (2) auront respectivement les signes suivants :

$$- + - \ldots\ldots - + +,$$
$$- - - \ldots\ldots - - +;$$

on a donc

$[a-h] = \{a\}, - + - \ldots\ldots - + + \ (a-1)$,

$[a+h] = \{a\}, - - - \ldots\ldots - - + \ (a-1)$.

Donc, si $f^{(n+1)}a$ et $f^{(n-1)}a$ ont le même signe, $[a+h]$ aura $l+1$ variations de moins que $[a-h]$, et si $f^{(n+1)}(a)$, $f^{(n-1)}a$ sont de signe contraire, alors $[a+h]$ aura $l-1$ variations de moins que $[a-h]$.

4^me^ Lemme. *Soit* $fx=0$ *une équation du degré* m, *je dis que les suites* $[\alpha]$, $[\beta]$, *ne pourront différer que de* m *variations au plus.*

en effet, en vertu du 1^er^ Lemme, la suite

$$f^{(m)}x,\ f^{(m-1)}x,\ \ldots\ f'x,\ fx$$

ne peut perdre que m variations lorsque pour x on substitue consécutivement les nombres compris entre les limites $-\frac{1}{0}$, $+\frac{1}{0}$.

5^me^ Lemme. *Jamais une variation perdue ne peut reparaître dans la suite des valeurs croissantes de* x.

En effet, par le 2^me^ Lemme, les racines $x=a, b, \ldots$ de $fx=0$, feront disparaître les variations 1 à 1; et, en vertu du 3^me^ Lemme, les racines des équations $f'x=0$, $f''x=0$, etc., font disparaître les variations 2 à 2; donc, jamais une variation perdue ne pourra reparaître.

Théorème de Fourier.

Si l'équation $fx=0$ *a* n *racines réelles* a, b,... *entre* $x=\alpha$, $x=\beta$, *je dis que la suite* $[\beta]$, *aura au moins* n *variations de moins que la suite* $[\alpha]$, *on suppose* $\beta > \alpha$.

Démonstration. Car, en vertu du 2^me^ Lemme, la suite $[a+h]$,

h étant suffisamment petit, aura, au moins, une variation de moins que $[a-h]$, de même $[b+h]$ aura au moins une variation de moins que $[b-h]$, etc.

Il suit de là

1° Si $[\beta]$ n'a pas moins de variations que $[\alpha]$, il n'y aura aucune racine entre α et β.

Si $[\beta]$ a n variations de moins que $[\alpha]$, il n'y aura que n racines possibles entre α et β.

Mais on ne doit pas conclure de là que ces n racines existent nécessairement entre α et β; car, d'après le 3^{me} Lemme, la perte des variations peut provenir également des racines des équations $f'x=0$, $f''x=0$, etc.

2° Si n est impair, il y aura nécessairement une racine réelle entre α et β. Car les racines des équations $f'x=0$, $f''x=0$, etc., ne peuvent faire disparaître qu'un nombre pair de variations.

3° La suite $f^{(m)}x$, $f^{(m-1)}x$, ... $f'x$, fx perd autant de couples de variations que l'équation $fx=0$ a de couples de racines imaginaires conjuguées. Car la perte d'une variation correspond toujours à une racine réelle. Donc si deux racines réelles manquent, c'est-à-dire si l'équation a deux racines imaginaires, alors, par la substitution d'une certaine valeur, deux variations doivent nécessairement disparaître à la fois.

Soit $2i$ le nombre des racines imaginaires de $fx=0$, $m-2i$ celui des racines réelles, quand on fait passer x de $-\frac{1}{0}$ à $\frac{1}{0}$, les m variations de $[-\frac{1}{0}]$ disparaîtront, et puisque les $m-2i$ racines réelles chassent les variations 1 à 1, les $2i$ autres variations seront chassées 2 à 2, ou par couples, en rendant nulles les dérivées $f'x$, $f''x$, etc. Donc, si l'on est certain qu'entre α et β il n'y a pas de racines réelles, et si $[\beta]$ a $2i$ variations de moins que $[\alpha]$, alors l'équation $fx=0$, a au moins $2i$ racines imaginaires.

Exemple du Théorème de Fourier.

Soit $fx=x^3+2x^2-3x+2=0$;

on a

$$f''x=6,\quad f''x=6x+4,\quad f'x=3x^2+4x-3,$$
$$fx=x^3+2x^2-3x+2.$$

Soit $\alpha=-10$, $\beta=-1$, on aura :

$$[-10]=+-+-,\qquad [-1]=+--+;$$

Il y a donc une racine entre -10 et -1.

Soit $\alpha = 0$, $\beta = 1$, on aura

$$[0] = + + - +,$$
$$[1] = + + + +;$$

Il y a donc deux racines entre 0 et 1.

(b) Théorème de Sturm.

KLÜGELS, Math. wörterb., sup. II.

On suppose que l'équation $fx = 0$, du degré m, est privée de racines égales, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de facteurs communs entre fx et $f'x$.

1. FORMATION DES POLYNOMES $f_1x, f_2x, f_3x \ldots f_mx$.

Cherchez le plus grand diviseur commun entre fx et $f'x$, en ayant soin que les quotients partiels soient toujours des entiers, et en prenant les restes consécutifs en signe contraire. Soient $R_1, R_2 \ldots R_n$ ces restes, on aura la suite de polynomes

$$fx, f_1x = f'x, f_2x = -R_1, f_3x = -R_2, \text{ etc.}, \quad f_mx = -R_n,$$

et trois quelconques de ces polynomes, pris consécutivement, seront liés entre eux par la relation

$$f_{n-1}x = q_n f_n x - f_{n+1}x. \qquad (1)$$

q_n est le quotient entier de la division de $f_{n-1}x$ par f_nx et f_{n+1} est le reste de cette division pris en signe contraire.

Exemple. Étant donnée l'équation

$$fx = x - 4\tfrac{4}{5}x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0,$$

former les polynomes

$$f_1x, f_2x, f_3x, f_4x.$$

On a d'abord

$$f_1x = f'x = 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = 0,$$

ou

$$f_1x = x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Pour former f_2x, je divise fx par f_1x, on trouve pour reste

$$R_1 = 5x^2 - 7x + 2,$$

on posera donc

$$f_2x = -5x^2 + 7x - 2.$$

Pour former f_3x, je diviserai $f_1x = x^3 - x^2 + 2x - 1$,

par $f_2x = -5x^2 + 7x - 2$ ou $5f_1x = 5x^3 - 5x^2 + 10x - 5$ par f_2x, on trouve pour reste

$$R_2 = 54x - 29;$$

on aura, par conséquent :

$$f_3x = -54x + 29.$$

On forme ensuite f_4x en divisant $f_2x = -5x^2 + 7x - 2$ par $f_3x = -54x + 29$. Pour que le quotient partiel devienne entier, il faudra diviser $54f_2x$ par f_3x, et l'on aura pour reste

$$R_3 = 925,$$

donc $f_4x = -925$. On a donc, en résumé, les polynomes suivants :

$$fx = x^4 - \tfrac{4}{5}x^3 + 4x^2 - 4x + 1,$$
$$f_1x = x^3 - x^2 + 2x - 1,$$
$$f_2x = -5x^2 + 7x - 2,$$
$$f_3x = -54x + 29,$$
$$f_4x = -925.$$

2. Lemmes préliminaires.

1^er^ Lemme. *Le dernier des polynomes* $fx, f_1x, f_2x, \ldots f_mx$, (2) *ou* f_mx, *est toujours un nombre.*

Car $fx = 0$ étant du degré m, il est clair que f_mx sera du degré zéro. Mais si l'on avait $f_mx = 0$, alors fx et $f_1x = f'x$ auraient un facteur commun, et par conséquent l'équation $fx = 0$ renfermerait des racines égales, ce qui est contre l'hypothèse.

2^me^ Lemme. *Deux polynomes consécutifs* $f_{n-1}x$, f_nx, *pris dans la suite* (2), *ne peuvent pas s'évanouir ensemble pour une certaine valeur* α *de* x.

Car si on avait à la fois $f_{n-1}\alpha = 0$, $f_n\alpha = 0$, l'équation (1) donnerait aussi $f_{n+1}\alpha = 0$, donc $f_{n+2}\alpha = 0$, etc.; donc $f_m\alpha = 0$, ce qui est contraire au 1^er^ Lemme.

3^me^ LEMME. *Si pour une certaine valeur réelle* $x=\alpha$, *on a* $f_n\alpha=0$, *les fonctions voisines* $f_{n-1}\alpha$ et $f_{n+1}\alpha$, *seront de signes contraires et différentes de zéro.*

Démonstration. 1° Si l'on avait $f_{n-1}\alpha=0$, ou bien $f_{n+1}\alpha=0$, deux fonctions consécutives

$$f_{n-1}\alpha,\ f_n\alpha \quad \text{ou} \quad f_n\alpha,\ f_{n+1}\alpha$$

s'évanouiraient en même temps, ce qui est contraire au 2^e^ Lemme.

2° Comme on a $f_n\alpha=0$, l'équation (1) donne

$$f_{n-1}\alpha=-f_{n+1}\alpha.$$

4^me^ LEMME. *Si* f_nx *ne s'évanouit pas pour* $x=\alpha$, *il en sera de même des fonctions voisines*

$$f_n(x-h),\ f_n(x+h),$$

et l'on pourra concevoir h *assez petit, pour que les trois fonctions*

$$f_n(\alpha-h),\ f_n(\alpha),\ f_n(\alpha+h)$$

aient le même signe.

Car on a :

$$f_n(\alpha-h)=f_n\alpha-hf'_n(\alpha-\varepsilon h),$$
$$f_n\alpha=f_n\alpha,$$
$$f_n(\alpha+h)=f_n\alpha+hf'_n(\alpha+\varepsilon_1 h);$$

donc 1° f_nx n'étant pas nul, il en sera de même de $f_n(\alpha-h)$, $f_n(\alpha+h)$ quelque soit h;

2° On peut concevoir h assez petit pour que les seconds membres aient le signe de leur 1^er^ terme $f_n\alpha$.

5^me^ LEMME. *Si le nombre réel* $x=\alpha$, *ne satisfait pas à l'équation* $fx=0$, *alors, en concevant* h *suffisamment petit, les trois suites de signes*

$$[\alpha-h],\ [\alpha],\ [\alpha+h],$$

correspondants aux trois séries de polynomes

$$\left.\begin{array}{llll} f(\alpha-h), & f_1(\alpha-h), & f_2(\alpha-h), & \ldots f_m(\alpha-h), \\ f\alpha, & f_1\alpha, & f_2\alpha, & \ldots f_m\alpha, \\ f(\alpha+h), & f_1(\alpha+h), & f_2(\alpha+h), & \ldots f_m(\alpha+h), \end{array}\right\} \qquad (3)$$

auront le même nombre de variations.

Démonstration. 1° Si aucun terme de la 2^de^ des suites (3) ne s'évanouit, alors le lemme actuel est un corollaire du précédent.

2° Si l'un des termes de cette suite disparaît, par exemple, si l'on a $f_n\alpha = 0$, alors, en vertu du 3^me^ Lemme, les termes $f_{n-1}\alpha$, $f_{n+1}\alpha$ seront de signe contraire, mais aucune de ces fonctions ne sera nulle.

Comme $f_{n+1}\alpha$ n'est pas nul, il suit du 4^me^ Lemme que les termes $f_{n+1}(\alpha - h)$, $f_{n+1}(\alpha + h)$ seront de même signe que la fonction $f_{n+1}\alpha$, et aucune de ces fonctions ne sera égale à zéro.

Il suit de là, que les signes correspondants aux fonctions

$$f_{n-1}(\alpha - h),\ f_n(\alpha - h),\ f_{n+1}(\alpha - h), \qquad (1'$$

$$f_{n-1}\alpha,\qquad f_n\alpha,\qquad f_{n+1}\alpha, \qquad (2'$$

$$f_{n-1}(\alpha + h),\ f_n(\alpha + h),\ f_{n+1}(\alpha + h), \qquad (3'$$

termes généraux des suites (3), ne pourront être que les suivants :

$\pm\ \pm\ \mp$	$\pm\ \mp\ \mp$
$\pm\ (\pm)\ \mp$	$\pm\ (\pm)\ \mp$
$\pm\ \mp\ \mp$	$\pm\ \pm\ \mp$
$\pm\ \pm\ \mp$	$\pm\ \mp\ \mp$
$\pm\ (\mp)\ \mp$	$\pm\ (\mp)\ \mp$
$\pm\ \mp\ \mp$	$\pm\ \pm\ \mp$,

$(\pm)$ étant le signe du terme $f_n\alpha$ qui disparaît. Or, l'on voit que chaque ligne horizontale ne présente qu'une variation. Donc, en faisant dans les équations

$$(1',\ (2',\ (3',\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

les signes des suites (3) auront le même nombre de variations.

6^me^ Lemme. *Si* $a < \alpha < b$, *et qu'on n'a pas* $f\alpha = 0$, *les deux suites de signes* [a], [b], *correspondants aux deux séries*

$$fa,\ f_1a,\ f_2a, \ldots f_ma, \qquad (4'$$

$$fb,\ f_1b,\ f_2b, \ldots f_mb, \qquad (5'$$

auront le même nombre de variations.

Car en faisant varier x d'une manière continue de a à b, on aura entre les suites (4', (5' des séries correspondantes à ces valeurs de x, qui, par le 5^me^ Lemme, auront toutes précisément autant de variations que la série (4'; donc la suite (5' en aura autant que la série (4' et pas d'avantage.

7^me^ LEMME. *Soit* $x = \alpha$ *une racine de l'équation* $fx = 0$; *je dis que la suite des signes* $[\alpha + h]$, *correspondants aux polynomes*

$$f[\alpha+h],\ f_1[\alpha+h],\ f_2[\alpha+h],\ \ldots f_n[\alpha+h],$$

aura une variation de moins que la suite des signes $[\alpha - h]$ *des polynomes*

$$f[\alpha-h],\ f_1[\alpha-h],\ f_2[\alpha-h],\ \ldots f_m[\alpha-h],$$

h *étant toujours supposé suffisamment petit.*

Démonstration. 1° A cause de $f\alpha = 0$, on a :

$$f(\alpha-h) = -h\left[f'\alpha - \frac{h}{1\cdot 2}f''(\alpha-\varepsilon h)\right],$$

$$f(\alpha+h) = +h\left[f'\alpha + \frac{h}{1\cdot 2}f''(\alpha+\varepsilon_1 h)\right].$$

On peut concevoir h assez petit, pour que le signe du binôme $f'\alpha \pm \frac{h}{1\cdot 2}f''(\alpha \pm \varepsilon h)$, soit celui de son 1^er^ terme $f'\alpha = f_1\alpha$.

Il suit de là, que $f(\alpha - h)$ et $f_1\alpha$ sont de signe contraire, tandis que $f(\alpha + h)$ et $f_1\alpha$ sont de même signe.

2° Comme $f_1\alpha$ n'est pas nul, car on a $f\alpha = 0$, (2^me^ Lemme), il suit du 4^me^ Lemme, que les fonctions $f_1(\alpha + h)$, $f_1(\alpha - h)$ ne s'évanouissent pas, et que pour h suffisamment petit, ils sont de même signe que $f_1\alpha$.

3° De ce que $f_1\alpha$ n'est pas nul, il suit du 5^me^ Lemme, que les suites de signes $[\alpha - h]$, $[\alpha]$, $[\alpha + h]$, correspondantes aux polynomes

$$\begin{array}{lll} f_1[\alpha-h],\ f_2[\alpha-h],\ \ldots f_m[\alpha-h], \\ f_1\alpha, \quad f_2\alpha, \quad \ldots f_m\alpha, \\ f_1[\alpha+h],\ f_2[\alpha+h],\ \ldots f_n[\alpha+h], \end{array}$$

auront un même nombre de variations.

4° Donc, si dans les suites

$$(m)\ \begin{cases} f(\alpha-h),\ f_1(\alpha-h),\ \ldots f_m(\alpha-h), \\ f\alpha, \quad f_1\alpha, \quad \ldots f_m\alpha. \\ f(\alpha+h),\ f_1(\alpha+h),\ \ldots f_m(\alpha+h). \end{cases}$$

On suppose que le signe de $f_1\alpha$ soit $+$, alors à cause de 1°, le signe de $f(\alpha-h)$ sera $-$, celui de $f(\alpha+h)$ sera $+$. Il suit aussi de 2° que $+$ sera le signe de $f_1(\alpha-h)$ et de $f_1(\alpha+h)$. Il y aura donc une variation de $f(\alpha-h)$ à $f_1(\alpha-h)$, et il n'y en aura aucune de $f(\alpha+h)$, à $f_1(\alpha+h)$.

Mais, à cause de 3°, la partie des suites (m), qui suit leurs premiers termes, a le même nombre de variations; soit v ce nombre de variations; il est clair que la 1re des suites (m) aura $v+1$ variations, tandis que la 3me n'en aura que v, donc elle en a 1 de moins, et seulement 1 de moins que la 1re.

Théorème de Sturm.

Soient a *et* b *deux nombres réels quelconques*, $a<b$, *soit* v *le nombre des variations de la suite*

$$fb, f_1b, f_2b, \ldots f_mb,$$

et u *le nombre des variations de la suite*

$$fa, f_1a, f_2a, \ldots f_ma,$$

je dis que l'équation $fx=0$, *aura précisément autant de racines réelles comprises entre* a *et* b, *qu'il est marqué par la différence* $u-v$.

Démonstration. Si l'on fait varier x d'une manière continue de a à b, il suit du 7me Lemme, que, pour chaque racine comprise entre a et b, il se perdra 1, et seulement 1 variation de signes. Donc la suite des signes $[b]$ aura autant de variations de moins que la suite $[a]$, qu'il y a de racines réelles comprises entre a et b.

Exemple. Soit $fx=x^4-\frac{4}{5}x^3+4x^2-4x+1=0$,
on formera les polynomes

$$f_1x=x^3-x^2+2x-1,$$
$$f_2x=-5x^2+7x-2,$$
$$f_3x=-54x+29,$$
$$f_4x=-925.$$

1° Soit $x=0$, on aura $f0=+1$, $f_10=-1$, $f_20=-2$,
$f_30=+29$, $f_4=-925$,
on a donc la suite de signes

$$[0]=+--+-, \text{ ou } 3 \text{ variations.}$$

2° Soit $x=\frac{1}{3}$, on aura :

$$f(\tfrac{1}{3})=+\tfrac{2}{27},\ f_1(\tfrac{1}{3})=-\tfrac{11}{27},\ f_2(\tfrac{1}{3})=-\tfrac{2}{9},\ f_3(\tfrac{1}{3})=+11,\ f_4(\tfrac{1}{3})=-925;$$

on a donc la suite des signes

$$[\tfrac{1}{3}]=+--+-,\ \text{ou 3 variations.}$$

3° Soit $x=\frac{2}{3}$, on aura :

$$f(\tfrac{2}{3})=-\tfrac{7}{81},\ f_1(\tfrac{2}{3})=+\tfrac{5}{27},\ f_2(\tfrac{2}{3})=+\tfrac{4}{9},\ f_3(\tfrac{2}{3})=-7,\ f_4(\tfrac{2}{3})=-925;$$

ce qui donne la suite de signes

$$[\tfrac{2}{3}]=-++--,\ \text{ou 2 variations.}$$

4° Soit enfin $x=1$, on aura :

$$f(1)=+\tfrac{2}{3},\ f_1(1)=+1,\ f_2(1)=0,\ f_3(1)=-25,\ f_4(1)=-925;$$

ce qui donne la suite

$$[1]=++0--,\ \text{ou 1 variation.}$$

Il y a donc 1 racine réelle entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, et 1 racine réelle entre $\frac{2}{3}$ et 1, les deux autres racines sont donc imaginaires.

(e). Méthode de Newton pour l'approximation des racines des équations numériques.

Supposons que α soit une valeur approchée de l'une des racines de l'équation $fx=0$, alors $f(\alpha)$ différera peu de zéro, et sera un nombre positif ou négatif très-petit. Cela posé, si a est la racine inconnue dont on demande des valeurs de plus en plus approchées, on posera

$$1^\circ\quad a=\alpha+\varepsilon,$$

ε sera une quantité positive ou négative très-petite. Mais on a, par le Théorème de Taylor :

$$0=f(a)=f(\alpha+\varepsilon)=f(\alpha)+\varepsilon f'(\alpha)+\frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}f''(\alpha)+R.$$

Comme ε est très-petit, on pourra négliger le reste R, qui est très-petit à cause du facteur ε^3 qu'il renferme, et poser

$$0=f(\alpha)+\varepsilon f'\alpha+\frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}f'\alpha,$$

ce qui donne :

$$\varepsilon = \frac{-f'\alpha + \sqrt{(f'\alpha)^2 - 2f\alpha \cdot f''\alpha}}{f''\alpha}.$$

On a pris le signe supérieur du radical pour la raison que ε doit être très-petit.

On a donc

$$A = \alpha + \frac{-f'\alpha + \sqrt{(f'\alpha)^2 - 2f\alpha f''\alpha}}{f''\alpha} = \alpha_1.$$

2° On posera

$$A = \alpha_1 + \varepsilon,$$

ce qui conduira à

$$\varepsilon = \frac{-f'\alpha_1 + \sqrt{(f'\alpha_1)^2 - 2f\alpha_1 f''\alpha}}{f''\alpha_1},$$

et par suite à la seconde approximation

$$A = \alpha_1 + \frac{-f'\alpha_1 + \sqrt{(f'\alpha_1)^2 - 2f\alpha_1 f''\alpha_1}}{f''\alpha_1} = \alpha_2.$$

On aura une 3^{me} correction en posant

$$A = \alpha_2 + \varepsilon, \text{ etc.}$$

Supposons que l'approximation soit poussée assez loin pour qu'on puisse négliger le carré de la correction ε, alors, en désignant par α_n cette valeur approchée, et en posant

$$a = \alpha_n + \varepsilon,$$

on cherchera ε par l'équation du 1er degré

$$0 = f(\alpha_n) + \varepsilon f'(\alpha_n);$$

d'où :

$$\varepsilon = -\frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)},$$

et par conséquent

$$A = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)} = \alpha_{n+1}.$$

En posant de nouveau

$$A = \alpha_{n+1} + \varepsilon,$$

on trouvera

$$\varepsilon = -\frac{f(\alpha_{n+1})}{f'(\alpha_{n+1})},$$

ce qui donne la nouvelle valeur approchée

$$A = a_{n+1} - \frac{f(a_{n+1})}{f'(a_{n+1})} = a_{n+2}, \text{ etc.}$$

Exemple. L'équation $x^3 + 5x - 10 = fx = 0$, a une racine réelle entre 1 et 2, ou, entre 1,3 et 1,2. Posons

$$a = 1,3 + \varepsilon,$$

on aura

$$f(1,3) = 0,21293,$$
$$f'(1,3) = 19,2805,$$
$$f''(1,3) = 43,94;$$

donc

$$\varepsilon = \frac{-f'(1,3) + \sqrt{(f'1,3)^2 - 2f(1,3)f''(1,3)}}{f''(1,3)} = -0,011186;$$

d'où

$$a = 1,3 - 0,011186 = 1,288814.$$

Cette valeur est déjà très-approchée, car on a

$$f(1,288814) = -0,00001619445,$$

résultat fort petit. On peut donc négliger le carré de ε, dans le développement de la fonction

$$0 = f(a) = f[1,288814 + \varepsilon].$$

On trouve alors

$$\varepsilon = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = -\frac{f(1,288814)}{f'(1,28814)} = 0,00000086\ldots,$$

ce qui donne

$$a = 1,28881486\ldots..$$

2^me^ *Exemple.* L'équation $x \log x - 1 = 0$, a une racine réelle entre $\frac{7}{4}$ et 2. Posons

$$a = \tfrac{7}{4} + \varepsilon = 1,75 + \varepsilon;$$

on trouvera

$$a = \alpha + \varepsilon = 1,75 + \frac{-f'(1,75) + \sqrt{f'(1,75)^2 + 2f''(1,75)f(1,75)}}{f''(1,75)}$$
$$= 1,763223.$$

(d) Méthode d'approximation par les séries.

L'équation proposée $\varphi x = 0$, étant dégagée des racines égales qu'elle pourrait contenir, on cherche une valeur approchée α de celle a des racines réelles de cette équation, dont on veut connaître la valeur par approximation.

Cela posé, on décompose la proposée en deux parties ψx, y telles que l'on ait en même temps

$$\varphi x = \psi x - y = 0, \quad \psi\alpha = 0, \quad \text{et} \quad y = 0, \text{ pour } x = \alpha.$$

La valeur de a sera donnée ensuite par la série (c) du § 30, savoir :

$$a = \alpha + \frac{1}{\psi'\alpha}\cdot y + \frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\psi'\alpha}\right)\cdot\frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{\psi'\alpha}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\psi'x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\psi'\alpha}\right)\right]\cdot\frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$

$$= \alpha + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \text{etc.}$$

$$A_1 = \frac{1}{\psi'\alpha}, \quad A_2 = -\frac{A_1\psi''\alpha}{2(\psi'\alpha)^2}, \quad A_3 = -\frac{A_1\psi''\alpha + 6A_2\psi'\alpha\cdot\psi''x}{6(\psi'\alpha)^3}, \text{ etc.}$$

1^er^ *Exemple.* Soit $\varphi x = x^5 + 5x - 10 = 0$. Une racine réelle de cette équation est comprise entre 1,3 et 1,2; on prendra donc

$$\alpha = 1,3,$$

et l'on aura :

$$\varphi\alpha = 0,21293.$$

On peut donc poser :

$$\varphi x = \psi x - y = (x^5 + 5x - 10,21293) + 0,21293 = 0;$$

ce qui donne :

$$\psi x = x^5 + 5x - 10,21293, \quad y = -0,21292, \quad y = \psi x.$$

On a ensuite

$$\frac{dy}{dx} = \psi' x = 5x^4 + 5, \quad \text{donc} \quad \psi'\alpha = 19,2805,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \psi'' x = 20x^3, \quad \text{donc} \quad \psi''\alpha = 43,94,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \psi''' x = 60x^2, \quad \text{donc} \quad \psi'''\alpha = 101,4.$$

Donc, en faisant usage de Tables de Logarithmes, on trouvera facilement :

$$A_1 = \frac{1}{\psi'\alpha} = 0,0518654,$$

$$A_1 y = -0,0110512,$$

$$A_2 y^2 = -0,0001389,$$

$$A_3 y^3 = -0,0000025,$$

etc.,

et par suite

$$a = \alpha + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0{,}2888076\ldots$$

2^me *Exemple.* (Voir Poisson, *Méc.*, t. II, p. 388.)

Soit $$\varphi x = (e^x + e^{-x}) \cos x + 2 = 0.$$

Une valeur approchée de la racine réelle a de cette équation est

$$\alpha = 1{,}9 = 108°51'43''.$$

Cela posé, on écrira :

$$\varphi x = \psi x - y = [(e^x + e^{-x}) \cos x + 2{,}209829] - 0{,}209829 = 0,$$

$$y = \psi x = (e^x + e^{-x}) \cos x + 2{,}209829, \quad y = 0{,}209829.$$

On a donc

$$\psi'\alpha = (e^\alpha - e^{-\alpha}) \cos\alpha - (e^\alpha + e^{-\alpha}) \sin\alpha,$$

$$\psi''\alpha = -2(e^\alpha - e^{-\alpha}) \sin\alpha,$$

$$\psi'''\alpha = -2(e^\alpha - e^{-\alpha}) \cos\alpha - 2(e^\alpha + e^{-\alpha}) \sin\alpha.$$

$$e^\alpha = 6{,}6858948\ldots, \quad e^{-\alpha} = 0{,}1495689\ldots$$

$$\text{Log}\cos\alpha = 9{\cdot}5095909, \quad \text{Log}\sin\alpha = 9{,}9760289;$$

$$\alpha = 1{,}9,$$

$$A_1 y = -0{,}0244512,$$

$$A_2 y = -0{,}0004309,$$

$$a = \alpha + A_1 y + A_2 y^2 = 1{,}87511.$$

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Nous partageons cette Section en trois Chapitres : dans le I^er^ nous donnons les Applications du Calcul différentiel aux Courbes planes; dans le II^me^ celles aux Courbes dans l'espace, et dans le III^me^, les Applications aux surfaces.

CHAPITRE I^er^.

COURBES PLANES.

Notations et définitions. Nous supposerons que les axes sont rectangulaires, que X soit l'axe des abscisses, et Y celle des ordonnées. Nous désignerons par $M(x,y)$ un point quelconque de la courbe, x et y étant les coordonnées du point M, savoir x l'abscisse et y l'ordonnée. Nous représenterons l'équation d'une courbe plane quelconque par

$$y = fx \quad \text{ou} \quad F(x,y) = 0.$$

Si la courbe est rapportée aux coordonnées polaires, nous représenterons par $M(r,\theta)$ un point quelconque de cette courbe. r sera alors le rayon vecteur du point M, et θ, l'angle que ce rayon fait avec l'axe fixe passant par le pôle. L'équation d'une courbe polaire sera indiquée par

$$r = f(\theta) \quad \text{ou} \quad F(r,\theta) = 0.$$

Les relations entre les coordonnées rectangulaires et polaires du même point d'une courbe quelconque, sont :

$$y = r\sin\theta, \quad x = r\cos\theta.$$

§ 39.

Dérivée et différentielle de l'arc d'une courbe plane quelconque.

(a) COORDONNÉES LINÉAIRES.

Théorème. *Soit* s *un arc quelconque d'une courbe* $y = fx$, *je dis que l'on aura :*

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \text{et} \quad ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Démonstration. On a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x}{2}\cdot f''(x+\varepsilon\Delta x)$,

$$0 < \varepsilon < 1. \qquad (1$$

Cela posé, l'arc s de la courbe étant une fonction de x, telle que ψx, on pourra écrire $s = \psi x$; cette équation conduit à la suivante

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\psi(x+\Delta x)-\psi x}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} + \frac{\Delta x}{2}\cdot\psi''(x+\varepsilon_1\Delta x);$$

$$0 < \varepsilon_1 < 1, \qquad (2$$

Soit Δc, la corde de l'arc Δs, on aura $\Delta c = \sqrt{\Delta y^2+\Delta x^2}$, et

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}+\frac{\Delta x}{2}\cdot f''(x+\varepsilon\Delta x)\right]^2}. \qquad (3$$

Mais on a évidemment $\Delta s > \Delta c$; donc, on a aussi $\frac{\Delta s}{\Delta x} > \frac{\Delta c}{\Delta x}$. Soit donc $k\cdot\Delta x$ une fonction de x qui s'évanouit avec x, et telle qu'en l'ajoutant à $\frac{\Delta c}{\Delta x}$ on obtient $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, on aura cette autre équation

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta c}{\Delta x} + k\cdot\Delta x.$$

Remplaçons dans cette équation les deux rapports $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, $\frac{\Delta c}{\Delta x}$, respectivement par leurs valeurs (2 et (3, on aura :

$$\frac{ds}{dx}+\frac{\Delta x}{2}\cdot\psi''(x+\varepsilon_1\Delta x)=\sqrt{1+[\frac{dy}{dx}+\frac{\Delta x}{2}\cdot f''(x+\varepsilon\Delta x)]^2}$$
$$+k\cdot\Delta x.$$

Si, dans cette équation, nous posons $\Delta x=0$, on obtient :

$$(4)\quad \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2};\ \text{d'où}\ ds=dx\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=$$
$$\sqrt{dy^2+dx^2}.$$

(*b*) COORDONNÉES POLAIRES.

Quand les coordonnées sont polaires, on a

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta.$$

De ces relations on tire, par la différentiation :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta}&=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,\\ \frac{dy}{d\theta}&=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta.\end{aligned}\right\}\ (5$$

Mais quand θ devient la nouvelle variable indépendante, l'expression (4) se change en

$$\frac{\frac{ds}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\sqrt{1+\frac{(\frac{dy}{d\theta})^2}{(\frac{dx}{d\theta})^2}},\ \text{ou, en}\ \frac{ds}{d\theta}=\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}.$$

Mais en remplaçant dans cette formule les dérivées $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ par leurs valeurs (5, on obtient enfin

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2};\ \text{d'où}\ ds=d\theta\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}=$$
$$\sqrt{r^2d\theta+dr^2}.$$

Ce sont les expressions de la dérivée, et de la différentielle de l'arc d'une courbe quelconque en coordonnées polaires.

Corollaire. Comme on a $\int ds=s+c$, c désignant une constante arbitraire, il est clair, que les deux formules différentielles $ds=dx\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$, $ds=d\theta\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}$,

donneront, pour l'expression de l'arc s en coordonnées rectangulaires, et polaires, respectivement :

$$(6)\quad s+c=\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},\quad s+c=\int d\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

C'est la tâche du Calcul intégral de donner les valeurs des seconds membres de ces formules, correspondantes à l'équation donnée $y=fx$ de chaque courbe particulière.

Les formules (6 comprennent la théorie de la *rectification* des courbes planes.

§ 40.

Dérivée et différentielle de l'aire d'une courbe plane.

Théorème. *Soit σ l'aire indéfinie d'une courbe* $y=fx$, *je dis que l'on aura :*

$$\frac{d\sigma}{dx}=y,\quad d\sigma=ydx.$$

Démonstration. L'aire σ est évidemment une fonction de x, telle que $\sigma=\varphi x$.

Donc, quand x devient $x+\Delta x$, σ deviendra $\sigma+\Delta\sigma$, et l'on aura, par la formule de Taylor,

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi x}{\Delta x}=\frac{d\sigma}{dx}+\frac{\Delta x}{2}\cdot\varphi''(x+\varepsilon\cdot\Delta x),\quad 0<\varepsilon<1.$$

Mais l'accroissement $\Delta\sigma$ de l'aire σ, correspondant à l'accroissement Δx de x, est évidemment plus grand ou plus petit que le rectangle $y\cdot\Delta x$; on a donc :

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta x}\gtrless y.$$

Donc, si $k\cdot\Delta x$ désigne une fonction de x qui s'évanouit avec Δx, telle qu'en l'ajoutant à y on obtienne le rapport $\frac{\Delta\sigma}{\Delta x}$, on aura l'équation

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta x}=y\pm k\cdot\Delta x.$$

Mettons pour $\frac{\Delta\sigma}{\Delta x}$ sa valeur ci-dessus, l'équation précédente de-

viendra :

$$\frac{d\Delta}{dx} + \frac{\Delta x}{2} \cdot \varphi''(x + \varepsilon \Delta x) = y \pm k \cdot \Delta x.$$

Faisons $\Delta x = 0$, il vient :

$$\frac{d\sigma}{dx} = y; \quad \text{d'où} \quad d\sigma = y dx.$$

THÉORÈME. *Soit τ l'aire d'une courbe polaire $r = f(\theta)$, limitée par la courbe, l'axe fixe et un rayon vecteur quelconque r, je dis que l'on aura :*

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \tfrac{1}{2} r^2, \quad \text{et} \quad d\tau = \tfrac{1}{2} r^2 \cdot d\theta.$$

Démonstration. Car τ étant une fonction de θ, telle que

$$\tau = \chi(\theta),$$

on aura

$$\tau + \Delta\tau = \chi(\theta + \Delta\theta),$$

$\Delta\tau$ exprimant l'accroissement de l'aire correspondant à l'accroissement de l'angle θ. On a donc, par la Formule de Taylor :

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta\theta} = \frac{\chi(\theta + \Delta\theta - \chi(\theta)}{\Delta\theta} = \frac{d\tau}{d\theta} + \frac{\Delta\theta}{2} \cdot \chi''(\theta + \varepsilon\Delta\theta), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Mais si du pôle comme centre, avec le rayon r, on décrit un arc de cercle, le secteur circulaire, correspondant à l'angle $\Delta\theta$, aura pour aire

$$\tfrac{1}{2} r^2 \cdot \Delta\theta,$$

et l'on aura évidemment $\Delta\tau \gtrless \tfrac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \Delta\theta$, ou

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta\theta} \gtrless \tfrac{1}{2} r^2.$$

On peut donc poser

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta\theta} = \tfrac{1}{2} r^2 \pm k \cdot \Delta\theta.$$

Remplaçons le 1er membre de cette égalité par sa valeur, donnée ci-dessus, nous aurons

$$\frac{d\tau}{d\theta} + \frac{\Delta\theta}{2} \cdot \chi''(\theta + \varepsilon\Delta\theta) = \tfrac{1}{0} r^2 \pm k \cdot \Delta\theta.$$

Fesons $\Delta\theta = 0$, il viendra

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \tfrac{1}{2} r^2; \quad \text{d'où} \quad d\tau = \tfrac{1}{2} r^2 d\theta.$$

1re *Rem.* Comme on a $\int d\sigma = \sigma + c$, $\int d\tau = \tau + c$, c étant une constante arbitraire, il est clair que les équations différentielles $d\sigma = y\,dx = f x\,dx$, $d\tau = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, correspondront aux intégrales indéfinies

$$\sigma + c = \int f x\,dx, \quad \tau + c = \int \tfrac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Ces formules feront connaître par l'intégration les aires σ et τ, des courbes planes, et renferment la théorie de la *quadrature* des courbes planes.

2me *Rem.* Comme la différentielle première de toute fonction d'une seule variable est de la forme $f x\,dx$, on donne aux procédés d'intégration de l'expression $\int f x dx$, le nom de *quadratures*.

§ 41.

Expression de l'angle que la tangente et la normale en un point quelconque d'une courbe plane font avec l'axe des x.

Équations de la tangente et de la normale.

Notations et définitions. Nous désignerons le point de contact de la tangente par $M'(x', y')$. Soient T et N les points où la tangente et la normale du point M′ de la courbe, rencontrent respectivement l'axe des x.

Les trois points T, M′, N constituent un triangle rectangle en M′, dont TN est l'hypothénuse. Soit P le pied de l'ordonnée y', cette ordonnée divise TN en deux segments, dont l'un, PT, adjacent à la tangente se nomme la *sous-tangente*, et dont l'autre, adjacent à la normale s'appelle la *sous-normale*.

Nous désignerons par T_0, le côté TM′, par N_0 le côté NM′ du triangle rectangle TM′N, par s_t la sous-tangente PT, et par s_n la sous-normale PN.

Nous marquerons par α l'angle que la tangente au point M′ fait avec l'axe des x, et nous poserons

$$a = \operatorname{tg} \alpha.$$

Nous désignerons par β l'angle qu'une sécante quelconque, passant par M′, fait avec l'axe des x, et nous poserons

$$b = \operatorname{tg} \beta.$$

Remarque. L'angle d'une droite avec l'axe des x se compte à

partir de la partie positive de l'axe des x, et en allant vers la partie positive de l'axe des y, par en haut.

(*a*) Direction de la tangente et de la normale.

THÉORÈME. *α étant l'angle que la tangente au point* $M'(x'y')$ *de la courbe* $y=fx$, *fait avec l'axe des* x, *je dis que l'on aura*

$$a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy'}{dx'}.$$

Démonstration. Soient $M'(x', y')$, $M''(x'+\Delta x', y'+\Delta y')$ deux points de la courbe, et M'M" la sécante faisant avec l'axe des x un angle β, on a évidemment

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x} = \operatorname{tg}\beta.$$

Mais α est une fonction de x' telle que $\alpha = \psi(x')$. Quand x' devient $x'+\Delta x'$, α deviendra $\alpha+\Delta\alpha$. Or, quand x' se change en $x'+\Delta x'$ la tangente au point M' deviendra la sécante M'M"; on a donc

$$\beta = \alpha + \Delta\alpha.$$

De plus $\Delta\alpha$ s'évanouira avec $\Delta x'$.

Cela posé on a, par l'équation ci-dessus :

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \operatorname{tg}(\alpha+\Delta\alpha).$$

Développons les deux membres de cette équation par la formule de Taylor, on aura, pour son 1er membre

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{f(x'+\Delta x')-fx'}{\Delta x'} = \frac{dy'}{dx'} + \frac{\Delta x'}{2}\cdot f''(x+\varepsilon\cdot\Delta x), \quad 0<\varepsilon<1;$$

son second membre deviendra

$$\operatorname{tg}(\alpha+\Delta\alpha) = \operatorname{tg}\alpha + \Delta\alpha\cdot\operatorname{tg}'(\alpha+\varepsilon_1\cdot\Delta\alpha), \quad 0<\varepsilon_1<1.$$

On a donc l'égalité :

$$\frac{dy'}{dx'} + \frac{\Delta x'}{2}\cdot f''(x+\varepsilon\cdot\Delta x) = \operatorname{tg}\alpha + \Delta\alpha\cdot\operatorname{tg}'(\alpha+\varepsilon_1\cdot\Delta\alpha.$$

Faisons $\Delta x' = 0$, donc $\Delta\alpha = 0$, il vient :

$$\frac{dy'}{dx'} = \operatorname{tg}\alpha = a.$$

Corollaire 1. On a par conséquent $\alpha = \text{arc tg} \cdot \frac{dy'}{dx'}$.

Mais on a :

$$\sin \alpha = \frac{\text{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{1+(\frac{dy'}{dx'})^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{dy'}{dx'})^2}};$$

on a donc aussi :

$$\alpha = \text{arc sin} \frac{\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{1+(\frac{dy'}{dx'})^2}}, \text{ et } \alpha = \text{arc cos} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{dy'}{dx'})^2}}.$$

Coroll. 2. Soit γ l'angle que la normale au point M' fait avec l'axe des x, on aura :

$$\text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\gamma = -1;$$

d'où :

$$\text{tg}\,\gamma = -\frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}} = -\frac{dx'}{dy'}.$$

Coroll. 3. On a trouvé

$$\frac{ds'}{dx'} = \sqrt{1+(\frac{dy'}{dx'})^2}.$$

Donc les expressions ci-dessus de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ deviennent :

$$\sin \alpha = \frac{\frac{dy'}{dx'}}{\frac{ds'}{dx'}} = \frac{dy'}{ds'},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\frac{ds'}{dx'}} = \frac{dx'}{ds'}.$$

THÉORÈME. *Soit μ l'angle que le rayon vecteur du point* M' *de la courbe polaire* $r=f(\theta)$, *fait avec la tangente au point* $M'(r', \theta')$, *je dis que l'on aura :*

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{\frac{dr'}{d\theta'}} = \frac{r'd\theta'}{dr'}.$$

Démonstration. Car α étant l'angle que la tangente fait avec l'axe des x, on a :

$$\mu = \alpha - \theta' ; \qquad \text{donc}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta'}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\theta'} = \frac{\dfrac{dy'}{dx'} - \operatorname{tg}\theta}{1+\dfrac{dy'}{dx'}\cdot\operatorname{tg}\theta'}.$$

Il faut changer dans cette expression la variable indépendante x' en θ', ce qui donne

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\dfrac{\dfrac{dy'}{d\theta'}}{\dfrac{dx'}{d\theta'}} - \operatorname{tg}\theta'}{1+\dfrac{\dfrac{dy'}{d\theta'}}{\dfrac{dx'}{d\theta'}}\cdot\operatorname{tg}\theta'} = \frac{\dfrac{dy'}{dx'} - \dfrac{dx'}{d\theta'}\dfrac{\sin\theta'}{\cos\theta'}}{\dfrac{dx'}{d\theta'} + \dfrac{dy'}{d\theta'}\dfrac{\sin\theta'}{\cos\theta'}}.$$

Mais on a :

$$\frac{dy'}{d\theta'} = \frac{dr'}{d\theta'}\sin\theta' + r'\cos\theta', \qquad \frac{dx'}{d\theta'} = \frac{dr'}{d\theta'}\cos\theta' - r'\sin\theta',$$

à cause des équations

$$x' = r'\cos\theta', \quad y' = r'\sin\theta'.$$

Donc, en substituant, il vient :

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\dfrac{dr'}{d\theta'}\sin\theta' + r'\cos\theta' - \dfrac{dr'}{d\theta'}\sin\theta' + r'\dfrac{\sin^2\theta'}{\cos\theta'}}{\dfrac{dr'}{d\theta'}\cos\theta' - r'\sin\theta' + \dfrac{dr'}{d\theta'}\dfrac{\sin^2\theta'}{\cos\theta'} + r'\sin\theta'}$$

$$= \frac{r' \cos\theta' + r' \dfrac{\sin^2\theta'}{\cos\theta'}}{\dfrac{dr'}{d\theta'} \cos\theta' + \dfrac{dr'}{d\theta'} \dfrac{\sin^2\theta'}{\cos\theta'}}$$

$$= \frac{r'}{\dfrac{dr'}{d\theta'}} = \frac{r' d\theta'}{dr'}.$$

Corollaire. On a encore les équations

$$\sin\mu = \frac{\operatorname{tg}\mu}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\mu}} = \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + (\dfrac{dr'}{d\theta'})^2}} = \frac{r'}{\dfrac{ds'}{d\theta'}},$$

$$\cos\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\mu}} = \frac{\dfrac{dr'}{d\theta'}}{\sqrt{r'^2 + (\dfrac{dr'}{d\theta'})^2}} = \frac{\dfrac{dr'}{d\theta'}}{\dfrac{ds'}{d\theta'}}.$$

(*b*) Équations de la Tangente et de la Normale.

1. La tangente. Toute droite passant par le point M'($x'y'$) a pour équation

$$y - y' = a(x - x').$$

Donc, quand on a

$$a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy'}{dx'},$$

l'équation précédente devient celle de la tangente au point M'(x',y') de la courbe.

Donc l'équation de la tangente au point M'(x',y') de la courbe $y = fx$, est

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

Remarque 1. Quand l'équation de la courbe est implicite, de la forme

$$F(x,y) = 0,$$

on aura, au point M',

$$(\frac{dF}{dx'}) + (\frac{dF}{dy'})\ \frac{dy'}{dx'} = 0,$$

d'où :

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{\left(\frac{dF}{dx'}\right)}{\left(\frac{dF}{dy'}\right)}.$$

Cette valeur mise dans la relation ci-dessus changera l'équation de la tangente en celle-ci :

$$(y-y')\left(\frac{dF}{dy'}\right)+(x-x')\left(\frac{dF}{dx'}\right)=0.$$

Rem. 2. Si l'on demande l'équation de la tangente, assujettie à passer par un point M"(x'', y''), il faudra déduire des équations

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x'),$$

$$y'=fx',$$

les valeurs des coordonnées inconnues du point de contact, puis substituer ces valeurs dans l'expression

$$a=\frac{dy'}{dx'}=\frac{y'-y''}{x'-x''}.$$

Alors on aura l'équation cherchée

$$y-y'=a(x-x').$$

Rem. 3. Si l'on veut chercher l'équation de la tangente parallèle à une droite donnée

$$y=ax+b,$$

il faudra déterminer les valeurs de x' et y', coordonnées inconnues du point de contact, par le moyen des deux équations

$$y-y'=a(x-x'),$$

$$y'=fx',$$

dont la première est l'équation d'une droite passant par M' parallèlement à la droite donnée.

2. La normale. La normale étant perpendiculaire à la tangente, et passant par le point de contact M'(x', y'), son équation sera :

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x')$$

$$=-\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}(x-x')$$

$$= - \frac{dx'}{dy'}(x - x').$$

Si l'équation de la courbe est de la forme $F(x,y) = 0$, l'équation de la normale sera

$$(y - y')\left(\frac{dF}{dx'}\right) - (x - x')\left(\frac{dF}{dy'}\right) = 0.$$

(c) Sous-tangente et Sous-normale.

1. Coordonnées rectangulaires.

La *sous-tangente* $= S_t$, est la valeur de $x - x'$, de l'équation de la tangente correspondante à $y = 0$. En effet, si dans l'équation de la tangente, nous posons $y = 0$, la valeur de x, qu'on en déduira, sera l'abscisse du point T, et si de cette abscisse nous retranchons celle du point P, qui est x', nous aurons la sous-tangente.

Mais on tire de l'équation de la tangente

$$x - x' = \frac{y - y'}{a};$$

donc, en faisant $y = 0$ dans cette expression, on aura :

$$S_t = - \frac{y'}{a} = - \frac{y'}{\frac{dy'}{dx'}} = - \frac{y'dx'}{dy'}.$$

La *sous-normale* $= S_n$, est la valeur de $x - x'$, tirée de l'équation de la normale, correspondante à $y = 0$.

En effet, si dans l'équation de la normale, nous posons $y = 0$, la valeur de x, qu'on en déduira, sera l'abscisse du point N, et si de cette abscisse nous retranchons celle du point P, qui est x', nous aurons la sous-normale.

Mais l'équation de la normale donne

$$x - x' = (y' - y)a.$$

Donc, pour $y = 0$, on a

$$S_n = ay' = \frac{y'dy'}{dx'}.$$

Rem. Le triangle rectangle TM'N, donne :

$$(s_t - s_n)^2 = M'T^2 + M'N^2.$$

Mais on a aussi :

$$y'^2 = M'T'^2 - s^2_t = M'N^2 - s^2_n, \quad \text{ou}$$
$$s^2_t - s^2_n = M'T^2 - M'N^2.$$

De ces deux équations on tire, par addition et soustraction

$$M'T^2 = s^2_t - s_t \cdot s_n = y'^2 \left(1 + \frac{dx'^2}{dy'^2}\right) = T_o^2,$$

$$M'N^2 = s^2_n - s_t s_n = y'^2 \left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right) = N_o^2.$$

On connaîtra donc par ces formules les longueurs de la tangente $M'T = T_o$ et de la normale $M'N = N_o$.

2. Coordonnées polaires.

Si par le pôle O on mène une droite perpendiculaire au rayon vecteur r' du point de contact $M'(r', \theta')$, cette droite rencontrera la tangente en un point T, et la normale en un point N.

$OT = s_t$ se nomme la sous-tangente polaire, et

$ON = s_n$ s'appelle la sous-normale polaire du point M'.

Or, le triangle OTM' étant rectangle en O, et μ étant l'angle opposé au côté OT de ce triangle, dont l'autre côté de l'angle droit en O est $OM' = r'$, on aura :

$$OT = S_t = r' \cdot \operatorname{tg}\mu = \frac{r'^2}{\frac{dr'}{d\theta'}}.$$

Le triangle ONM' est aussi rectangle en O, et l'angle de ce triangle, opposé au côté ON est $90° - \mu$, on a donc, par ce triangle, dans lequel r' est l'autre côté de l'angle droit, la relation :

$$ON = S_n = r' \operatorname{tg}(90 - \mu) = r' \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\mu} = \frac{dr'}{d\theta}.$$

Rem. On a encore ici

$$(s_t - s_n)^2 = M'T^2 + M'N^2,$$
$$r'^2 = M'T^2 - s^2_t = NM'^2 - s^2_n, \quad \text{ou}$$
$$s_t^2 - s_n^2 = M'T^2 - M'N^2;$$

d'où l'on tire :

$$M'T^2 = s^2_t - s_n s_t = \frac{r'^4}{\left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2} + r'^2 = T^2_o,$$

$$M'N'^2 = s'^2_n - s_n s_t = \left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2 + r'^2 = N'^2_\theta.$$

Le produit $s_n s_t$ est négatif puisque les segments s_n, s_t, ayant des positions contraires, ont des signes différents. C'est cette différence de signes qui fait que dans la 1re des équations ci-dessus, on doit écrire $(s_t - s_n)^2$, et non $(s_t + s_n)^2$.

APPLICATIONS DES FORMULES PRÉCÉDENTES.

1er *Exemple.* Pour l'Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$,

on a : $$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

Cela posé, on trouve :

1. Pour l'équation de la tangente
$$a^2y'(y - y') + b^2x'(x - x') = 0, \quad \text{ou}$$
$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2.$$

2. Pour l'équation de la normale
$$b^2x'(y - y') - a^2y'(x - x') = 0.$$

3. $s_t = \dfrac{a^2 - x'^2}{x'}$.

4. $s_n = -\dfrac{b^2x'}{a^2}$.

5. $T_0 = \dfrac{y'}{b^2x'}\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}$,

6. $N_0 = \dfrac{1}{a^2}\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}$.

2me *Exemple.* Pour l'Hyperbole $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$,

on a : $$\frac{dy'}{dx'} = \frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

Cela posé, on trouve :

1. Pour l'équation de la tangente
$$a^2x'(y - y') - b^2x'(x - x') = 0, \quad \text{ou}$$
$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2.$$

2. Pour l'équation de la normale
$$b^2x'(y - y') + a^2y'(x - x') = 0.$$

3. $s_t = \dfrac{a^2 - x'^2}{x'}$.

4. $s_n = \dfrac{b^2 x'}{a^2}$.

3^me *Exemple.* Pour la Parabole $y^2 = 2px$, on a :

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{p}{y'}.$$

Cela posé, on trouve :

1. Pour l'équation de la tangente

$$(y - y')y' - p(x - x') = 0, \quad \text{ou}$$
$$yy' = p(x + x').$$

2. Pour l'équation de la normale

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x').$$

3. $s_t = 2x'$.

4. $s_n = p$.

5. $T_0 = \sqrt{2x'(2x' + p)}$,

6. $N_0 = \sqrt{p(2x' + p)}$.

4^me *Exemple.* Les équations de la cycloïde sont

$$x = a\omega - a\sin\omega,$$

d'où

$$y = a - a\cos\omega,$$
$$dx = (a - a\cos\omega)\,d\omega = y\,d\omega,$$
$$dy = a\sin\omega \cdot d\omega = \sqrt{2ay - y^2} \cdot d\omega.$$

Donc

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{\sqrt{2ay' - y'^2}}{y'} = \sqrt{\frac{2a - y'}{y'}}.$$

Cela posé, on trouve :

1. Pour l'équation de la tangente

$$y - y' = \sqrt{\frac{2a - y'}{y'}} \cdot (x - x');$$

2. Pour l'équation de la normale

$$y - y' = -\frac{1}{\sqrt{\dfrac{2a - y'}{y'}}} \cdot (x - x') = -(x - x')\sqrt{\frac{y'}{2a - y'}}.$$

3. $s_t = -y' \sqrt{\frac{y'}{2a-y'}}$,

4. $s_n = \sqrt{2ay' - y'^2}$.

5. $T_o = y' \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{2a-y'}{y'}}} = y' \sqrt{\frac{2a}{2a-y'}}$.

6. $N_o = y' \sqrt{1 + \frac{2a-y'}{y'}} = \sqrt{2ay'}$.

5^me *Exemple.* Pour la Spirale d'Archimède $r = a\theta$, on a

$$\frac{dr}{d\theta} = a, \quad \text{donc}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{a} = \frac{a\theta}{a} = \theta.$$

Cela posé, on trouve :

$$s_t = \frac{r^2}{a},$$

$$s_n = a.$$

6^me *Exemple.* Pour la Spirale hyperbolique $r = \frac{a}{\theta}$,

on a $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2}$; donc

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{r}{\frac{a}{\theta^2}} = -\theta.$$

Donc $s_t = -r\theta = -a$.

7^me *Exemple.* Pour la Spirale logarithmique $r = ae^{m\theta}$,

on a $\frac{dr}{d\theta} = mae^{m\theta}$; donc

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{mae^{m\theta}} = \frac{1}{m}.$$

Cela posé, on trouve :

1. $s_t = \frac{r^2}{mae^{m\theta}} = \frac{r}{m}$.

2. $s_n = mae^{m\theta} = mr$.

3. $T_0 = \frac{r}{m}\sqrt{1+m^2}$,

4. $N_0 = r\sqrt{1+m^2}$.

(*d*) Asymptotes rectilignes.

1. Coordonnées rectilignes.

L'asymptote est une tangente dont le point de contact $M'(x',y')$ a pour abscisse $x' = \frac{1}{0}$, ou pour ordonnée $y' = \frac{1}{0}$, ou, pour coordonnées à la fois $x' = \frac{1}{0}$, $y = \frac{1}{0}$.

Soient α l'angle que l'asymptote fait avec l'axe des x, T le point où elle rencontre cet axe, et R celui où elle rencontre l'axe des y; soit aussi δ la distance de l'origine O à la tangente, on aura d'abord

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy'}{dx'} = a. \qquad (1$$

Ensuite, si dans l'équation de la tangente, qui est

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'),$$

on pose $x = 0$, on a

$$OR = y' - \frac{dy'}{dx'}x' = y' + ax'; \qquad (2$$

si l'on fait $y = 0$, il vient

$$OT = x' - \frac{y'}{\frac{dy'}{dx'}} = x' - \frac{y'}{a}. \qquad (3$$

On a de plus

$$\delta = OT \cdot \sin\alpha = x' - \frac{y'}{\frac{dy'}{dx}} \cdot \frac{\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{1+(\frac{dy'}{dx'})^2}}$$

$$= (x'\frac{dy'}{dx'} - y') \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{dy'}{dx'})^2}}$$

$$= \frac{(ax' - y')}{\sqrt{1+a^2}}. \qquad (4$$

De là on déduit les caractères analytiques suivants pour reconnaître si une courbe a des asymptotes rectilignes.

L'équation

$$y - y' = a(x - x')$$

sera celle d'une asymptote si l'on a :

1° y' fini quand $x' = \frac{1}{0}$, ou
x' fini quand $y' = \frac{1}{0}$.

2° $a = \frac{dy'}{dx'}$ fini, quand $x' = \frac{1}{0}$, ou $y' = \frac{1}{0}$, ou à la fois $x' = \frac{1}{0}$, $y' = \frac{1}{0}$.

3° $OR = y' - ax' = y' - \frac{dy'}{dx'}x'$ fini, quand $x' = \frac{1}{0}$, ou $y' = \frac{1}{0}$, ou $x' = \frac{1}{0}$, $y' = \frac{1}{0}$.

4° $OT = x' - \frac{y'}{a} = x' - \frac{y'}{\frac{dy'}{dx'}}$ fini, quand $x' = \frac{1}{0}$, ou $y' = \frac{1}{0}$ ou $x' = \frac{1}{0}$, $q' = \frac{1}{0}$.

5° $\delta = \frac{ax' - y'}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{\frac{dy'}{dx'}x' - y'}{\sqrt{1 + (\frac{dy'}{dx'})^2}}$ fini, quand $x' = \frac{1}{0}$, ou $y' = \frac{1}{0}$, ou $x' = \frac{1}{0}$, $y' = \frac{1}{0}$.

Nous disons qu'une quantité reste finie, quand elle ne prend pas la forme $\frac{1}{0}$.

1re *Rem.* Si OT reste fini, tandis que $OR = \frac{1}{0}$, pour $x' = \frac{1}{0}$, $y' = \frac{1}{0}$, alors l'asymptote est perpendiculaire à l'axe des x.

Si $OT = \frac{1}{0}$, et que OR reste fini pour des valeurs infinies de l'une des coordonnées, x', y' ou de toutes les deux, alors l'asymptote est parallèle à l'axe des x.

On pourrait avoir pour les mêmes valeurs de x', y' que ci-dessus,

1° les expressions

$$OT = \frac{1}{0},\ OR = 0;$$

alors l'asymptote coïncide avec l'axe des x;

2° les expressions

$$OT = 0,\ OR = \frac{1}{0};$$

dans ce cas l'axe des y est une asymptote;

3° les valeurs

$$OT = 0,\ OR = 0;$$

alors l'asymptote passera par l'origine des coordonnées. Mais pour

que sa position soit déterminée, il faut chercher ce que devient le rapport $\frac{dy'}{dx'}$, quand l'une des coordonnées x', y', ou toutes les deux deviennent infinies.

2^me^ *Rem.* Pour trouver l'équation des asymptotes rectilignes d'une courbe donnée $y=fx$, il faut chercher ce que devient l'équation

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'),$$

lorsqu'on rend infinie l'une des coordonnées x', y', ou toutes les deux.

2. Coordonnées polaires.

Soient δ la distance du pôle à la tangente au point $M'(r', \theta')$ de la courbe $r = f(\theta)$; μ l'angle que cette tangente fait avec le rayon vecteur r' du point de contact; α l'angle que la même tangente fait avec l'axe fixe passant par le pôle O; cela posé, la courbe aura une asymptote, quand l'un des caractères suivants se présentera :

1° Quand $\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\theta' - \alpha) = \frac{r'}{\left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)}$ reste fini, pour $r' = \frac{1}{0}$.

2° Quand $s_t = \frac{r'^2}{\frac{dr'}{d\theta'}}$ reste fini, pour $r' = \frac{1}{0}$;

3° Quand $\delta = r' \sin\mu = \frac{r'^2}{\frac{dr'}{d\theta'}\sqrt{r'^2 + \left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2}}$ reste fini, pour $r' = \frac{1}{0}$.

Le caractère primitif des asymptotes dans les courbes polaires consiste en ce que le point de contact doit répondre à $r' = \frac{1}{0}$, sans que la tangente ne cesse d'exister.

APPLICATION DES FORMULES PRÉCÉDENTES.

1^er^ *Exemple.* La conchoïde a pour équation $1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{m^2}{(y-b)^2}$ ou $\frac{y^2}{y^2 + x^2} = \frac{(y-b)^2}{m^2}$.

On voit, par cette équation, que

$$x=\tfrac{1}{0}, \quad \text{répond à} \quad y=b.$$

L'équation de sa tangente au point M(x',y') est

$$y-y'=a(x-x'),$$

$$a=\frac{dy'}{dx'}=\frac{(y'-b)^2}{m^2y'-(y'-b)[y'-b+y'^2+x'^2]}.$$

Pour $x'=\frac{1}{0}$, on a $y'=b$, donc $a=0$; donc la courbe a une asymptote dont l'équation est

$$y-b=y(x-x')=0, \quad \text{ou}$$
$$y=b.$$

2me *Exemple.* L'équation de la cissoïde est $y^2=\frac{x^3}{2r-x}$; donc à $y=\frac{1}{0}$, répond $x=2r$.

L'équation de sa tangente est

$$y-y'=a(x-x'),$$
$$a=\frac{3rx'^2-2x'^3}{y'(2r-x')^2}.$$

Donc pour $y'=\frac{1}{0}$, on a $a=0$, par conséquent

$$y-\tfrac{1}{0}=a(x-x')=0, \quad \text{ou}$$
$$y=\tfrac{1}{0},$$

est l'équation de l'asymptote. Les coordonnées du point de contact sont $y'=\frac{1}{0}$, $x'=2r$.

3me *Exemple.* L'équation polaire des sections coniques est

$$r=\frac{k}{1-m\cos\theta}. \qquad (1)$$

Pour la Parabole, on a $m=1$;
pour l'Ellipse, on a $m<1$;
pour le Cercle, on a $m=0$;
pour l'Hyperbole, on a $m>1$;
pour l'Hyp. équilatère, on a $m=\sqrt{2}$.

On a ici

$$\frac{dr'}{d\theta'}=\frac{-m\sin\theta'}{(1-m\cos\theta')^2}; \qquad (2)$$

donc

$$s_t=-\frac{k^2}{m\sin\theta'}. \qquad (3)$$

Quand $r=\frac{1}{0}$, l'équation (1) donne $1-m\cos\theta=0$,

ou $\cos\theta = \frac{1}{m}$; donc $\sin\theta = \pm \frac{\sqrt{m^2-1}}{m}$.

Donc, à $r' = \frac{1}{0}$, répond

$$S_t = \pm \frac{k^2}{\sqrt{m^2-1}}. \qquad (4)$$

Donc 1° Quand $m = 1$, on a $S_t = \frac{1}{0}$, donc la Parabole n'a pas d'asymptote.

2° Quand $m < 1$, alors S_t est imaginaire, donc l'Ellipse a des asymptotes imaginaires, c'est-à-dire n'en a pas.

3° Quand $m = 0$, on a S_t imaginaire, donc le Cercle n'a pas d'asymptotes.

4° Quand $m > 1$, S_t a deux valeurs finies, donc l'Hyperbole a deux asymptotes réelles.

4^me^ *Exemple.* L'équation de l'hyperbole étant

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

celle de sa tangente au point $M'(x',y')$ sera

$$y - y' = a(x - x'), \quad a = \frac{B^2x'}{A^2y'}.$$

Mais à $y' = \frac{1}{0}$, répond aussi $x' = \frac{1}{0}$, on a donc

$$a = \frac{B^2 \cdot \frac{1}{0}}{A^2 \cdot \frac{1}{0}} = \frac{0}{0}.$$

La vraie valeur de cette expression, s'obtient par conséquent en prenant les dérivées des deux termes de la fraction $\frac{B^2x'}{A^2y'}$, et en y faisant ensuite $x' = \frac{1}{0}$. On a donc

$$a = \frac{B^2}{A^2\frac{dy'}{dx'}}, \text{ ou } a^2 = \frac{B^2}{A^2}; \quad \text{d'où}$$

$$a = \pm \frac{B}{A}.$$

L'hyperbole a par conséquent deux asymptotes dont l'équation collective est

$$y - \tfrac{1}{0} = \pm \frac{B}{A}(x - \tfrac{1}{0}) = \pm \frac{B}{A}x - \tfrac{1}{0}$$

ou $$y = \pm \frac{B}{A}x.$$

5me *Exemple.* L'équation polaire de la cissoïde est

$$r = \frac{2m\sin^2\theta}{\cos\theta}. \qquad (1$$

On a donc

$$S_t = \frac{r'^2}{\frac{dr'}{d\theta'}} = \frac{2m\sin^3\theta'}{1+\cos^2\theta'}. \qquad (2$$

Pour $r' = \frac{1}{0}$, l'équation (1 donne $\cos\theta' = 0$.

De cette égalité on conclut

$$\theta' = \pm\tfrac{1}{2}\pi.$$

Donc, pour $r' = \frac{1}{0}$, on a $S_t = \pm 2m$.

Donc l'asymptote est perpendiculaire à l'axe des x, et distante de l'origine de la quantité $2m$.

6me *Exemple.* La quadratrice de Dinostrate a pour équation polaire

$$r = \frac{m(1-\frac{2\theta}{\pi})}{\cos\theta}.$$

On a donc

$$S_t = \frac{r'^2}{\frac{dr'}{d\theta'}} = \frac{m^2(1-\frac{2\theta}{\pi})^2}{m(1-\frac{2\theta}{\pi})\sin\theta - \frac{2m}{\pi}\cos\theta}.$$

Mais $r' = \frac{1}{0}$ donne $\cos\theta' = 0$, d'où $\theta' = \pm\frac{\pi}{2}$,

on a, par conséquent

$S_t = 2m$; la courbe a des asymptotes.

Remarque. Souvent, quand l'équation de la courbe est implicite, sous la forme $f(x,y) = 0$, il est difficile de reconnaître immédiatement ce que deviennent y, $\frac{dy}{dx}$, pour $x = \infty$. Dans ce cas on posera $\frac{y}{x} = t$, ou $y = xt$, puis on cherche la valeur de x en fonction de t, on trouve alors ce que devient t, et partant y, pour $x = \infty$.

Exemple. Soit $y^3 - 3axy + x^3 = 0$; on a $\frac{dy'}{dx'} = \frac{x'^2 - ay'}{ax' - y'^2}$,

$$OT = x' - y' \frac{dx'}{dy'} = \frac{ax'y'}{x'^2 - ay'},$$

$$OR = y' - x' \frac{dy'}{dx'} = -\frac{ax'y'}{ax' - y'}.$$

En posant $y' = tx'$, l'équation proposée devient

$$(tx)^3 - 3atx^2 + x^3 = 0 \; ; \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{3at}{t^3 + 1}.$$

Pour $x' = \infty$, on a $a + t^3 = 0$, d'où $t = 1$; donc $y' = -x'$. On a donc

$$OT = \frac{ax'(-x')}{x'^2 - a(-x')} = -\frac{ax'^2}{x'^2 + ax'} = -\frac{a}{1 + \frac{a}{x'}} = -a, \text{ pour } x' = \infty ;$$

$$OR = -\frac{ax'(-x)}{ax' + x'} = \frac{ax'^2}{ax' + x'} = \frac{a}{\frac{a}{x'} + \frac{1}{x'}} = a, \text{ pour } x' = \infty,$$

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{x'^2 + ax'}{ax' - x'^2} = \frac{1 + \frac{a}{x'}}{\frac{a}{x'} - 1} = 1, \text{ pour } x' = \infty.$$

Donc l'asymptote $y - a = x$, coupe l'axe des x et des y sous le même angle de 45°.

§ 42.

Angle de contingence.

1. coordonnées rectangulaires.

Supposons que la tangente au point M(x,y) de la courbe $y = fx$ fasse un angle α avec l'axe des x, une autre tangente au point M'$(x + \Delta x, y + \Delta y)$ de la même courbe fera avec l'axe des x un angle que nous nommerons γ. Comme α est une fonction de x, donnée par l'équation

$$\alpha = \text{arc tg} \cdot \frac{dy}{dx}, \qquad (1)$$

il est clair que α devient $\alpha + \Delta\alpha$, quand x devient $x + \Delta x$. Mais

quand x devient $x+\Delta x$ l'angle α devient l'angle γ; on a donc

$$\gamma=\alpha+\Delta\alpha,$$

d'où

$$\Delta\alpha=\gamma-\alpha.$$

On appelle *angle de contingence*, ce que devient la différence $\gamma-\alpha$, quand $\Delta x=dx=0$.

Pour trouver cette expression, nous chercherons celle de $\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}$, pour $\Delta x=0$. Mais dans cette hypothèse de la valeur de Δx, le rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}$ devient $\frac{d\alpha}{dx}$. Or, on a

$$\alpha=\text{arc tg}\cdot\frac{dy}{dx};$$

donc

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}}{1+(\frac{dy}{dx})^2}$$

$$=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+(\frac{dy}{dx})^2}.$$

Quand Δx devient dx, alors $\Delta\alpha=\gamma-\alpha$ devient $d\alpha$; on a donc, pour l'angle de contingence, l'expression

$$d\alpha=\frac{d\alpha}{dx}\cdot dx=\frac{\frac{d^2y}{d^2x}\cdot dx}{1+(\frac{dy}{dx})^2}.$$

2. COORDONNÉES POLAIRES.

Soient deux tangentes, la 1re au point $M(r,\theta)$, la seconde au point $M'(r+\Delta r,\theta+\Delta\theta)$ de la courbe polaire $r=f(\theta)$. Si μ et γ sont les angles qu'elles font respectivement avec les rayons vecteurs des points de contact, on aura évidemment

$$\gamma=\mu+\Delta\mu,$$

en désignant par $\Delta\mu$ l'accroissement de μ, correspondant à l'accroissement $\Delta\theta$.

Si α et γ désignent les angles que les deux tangentes font respectivement avec l'axe fixe du pôle, ou l'axe des x, on aura, comme dans le N° précédent

$$\Delta\alpha = \gamma - \alpha.$$

Cela posé, l'*angle de contingence* des courbes polaires est l'expression analytique de la différence $\gamma - \alpha$, correspondante à $\Delta\theta = d\theta = 0$; cette expression sera donc celle de $d\alpha$.

Comme on a

$$\mu = \alpha - \theta \quad \text{ou} \quad \alpha = \mu + \theta.$$

il vient

$$d\alpha = d\mu + d\theta.$$

Mais

$$\mu = \operatorname{arc\,tg} \cdot \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}};$$

donc

$$d\mu = \frac{d\left(\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}\right)}{1 + \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$$

$$= \frac{dr \cdot \frac{dr}{d\theta} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\,d\theta}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Donc

$$d\alpha = d\mu + d\theta = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}} \cdot d\theta, \quad \text{et}$$

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

§ 43.

Rapport entre l'accroissement des ordonnées et celui des abscisses.

On a : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x}{2} \cdot f''(x + \alpha\Delta x)$, $a = \frac{dy}{dx}$, $0 < \varepsilon < 1$,

quand $y = fx$ est l'équation de la courbe, et que $a = \operatorname{tg}\alpha$, α étant l'angle que la tangente au point $M(x,y)$ fait avec l'axe des x.

Nous avons vu (§ 34) qu'on pouvait supposer Δx assez petit pour que le signe du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dépend de celui de $a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$.

Donc quand Δx est positif, c'est-à-dire quand les abscisses croissent, le signe du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sera celui de Δy.

De plus Δy étant positif les ordonnées croissent, elles décroissent quand Δy est négatif.

Mais les ordonnées croissent, pour des abscisses croissantes, quand l'angle α est aigu, ou quand $\operatorname{tg}\alpha$ est positif; les ordonnées décroissent au contraire pour des abscisses croissantes, lorsque l'angle α est obtus, ou lorsque $\operatorname{tg}\alpha$ est négatif. Nous concluons de là que, dans le voisinage du point $M(x,y)$ d'une courbe $y = fx$,

1° Les ordonnées croissent pour des abscisses croissantes quand on a

$$\frac{dy}{dx} > 0.$$

Les limites de x entre lesquelles cette relation est satisfaite, seront, en même temps, celles entre lesquelles les ordonnées croîtront en même temps que leurs abscisses;

2° Les ordonnées décroîtront pour des abscisses croissantes quand on a

$$\frac{dy}{dx} < 0.$$

Les limites de x entre lesquelles cette relation est satisfaite, seront, en même temps, celles entre lesquelles les ordonnées décroîtront pendant que leurs abscisses croissent.

Remarque. Aux points pour lesquels on a $\frac{dy}{dx} = 0$, il arrive un changement dans la variation des ordonnées; si elles croissent avant ces points, elles décroîtront après les avoir dépassés, et *vice-versa*. En effet, nous savons que $\frac{dy}{dx} = 0$, caractérise la plus grande ou la plus petite ordonnée.

Exemple. Soit l'équation du cercle

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2,$$

α et β étant les coordonnées du centre, on en déduit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha - x}{y - \beta}. \qquad (1)$$

$\frac{dy}{dx} = 0$, répond à $x = \alpha$ et à $y = \beta + r$ ou $\beta - r$.

1° $\frac{dy}{dx} > 0$, exige que l'on ait

$$x < \alpha \quad \text{et} \quad y > \beta \quad \text{ou} \quad x > \alpha \quad \text{et} \quad y < \beta.$$

Donc, quand les abscisses croissent, les ordonnées croîtront depuis $x = \alpha - r$ jusqu'à $x = \alpha$, et prendront les valeurs de $y = \beta$ à $y = \beta + r$, ou depuis $x = \alpha$, jusqu'à $x = \alpha + r$, et prendront les valeurs de $y = \beta - r$ à $y = \beta$.

2° $\frac{dy}{dx} < 0$, exige que l'on ait

$$x < \alpha \quad \text{et} \quad y < \beta \quad \text{ou} \quad x > \alpha \quad \text{et} \quad y > \beta.$$

Donc, quand les abscisses croissent, les ordonnées décroîtront depuis $x = \alpha - r$ jusqu'à $x = \alpha$; et prendront les valeurs de $y = \beta$ à $y = \beta - r$ ou depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \alpha + r$; et prendront les valeurs de $y = \beta + r$ à $y = \beta$.

§ 39.

Concavité et convexité des courbes planes.

Nous compterons les angles des tangentes avec l'axe des x, à partir de cet axe vers en haut, et de droite à gauche. Cela posé soient $y = fx$ l'équation d'une courbe, α l'angle qu'une tangente au point $M(x, y)$ fait avec l'axe des x; soit γ l'angle que la tan-

gente au point $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ de la même courbe fait avec l'axe des x, Δx étant positive, on dit que la courbe est *concave* vers l'axe des x, quand on a

$$\alpha - \gamma > 0,$$

et *convexe* quand on a

$$\alpha - \gamma < 0.$$

Mais quand x devient $x+\Delta x$, α devient $\alpha+\Delta\alpha$ ou γ. Donc, dans le cas concave, où l'on a $\alpha > \gamma$, il faut que $\Delta\alpha$ soit négatif, et dans le cas de convexité, où l'on a $\alpha < \gamma$, il faut que $\Delta\alpha$ soit positif. Donc le caractère de concavité est indiqué par $\Delta\alpha < 0$, et celui de convexité, par $\Delta\alpha > 0$.

Donc, Δx étant supposé positif, le caractère de la concavité sera donné par l'inégalité

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta x} < 0,$$

et celui de la convexité par la relation

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta x} > 0.$$

1. COORDONNÉES RECTANGULAIRES.

Mais en posant $\alpha = \text{arc tg}\,\frac{dy}{dx} = \varphi x$, on a, par la formule de Taylor

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{\Delta x}{2}\cdot\varphi'(x+\varepsilon\cdot\Delta x), \quad 0<\varepsilon<1.$$

On peut donc concevoir Δx suffisamment petit pour que le signe du rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}$, dépend de celui de $\frac{d\alpha}{dx}$.

Donc pour ces valeurs de Δx, la courbe sera concave ou convexe selon que l'on aura :

$$\frac{d\alpha}{dx} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\alpha}{dx} > 0.$$

Les limites des valeurs de x, qui satisferont à ces inégalités, seront aussi celles entre lesquelles la courbe restera concave ou convexe.

Mais on a, par le § 42,

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+(\frac{dy}{dx})^2}.$$

Comme le dénominateur de cette expression est toujours positif, il est clair que le signe de $\frac{d\alpha}{dx}$, dépendra de celui de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Donc 1° y étant positif, la courbe sera concave dans le voisinage du point $M(x,y)$, quand on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0;$$

et l'étendue relative à cette concavité sera déterminée par les limites des valeurs de x qui satisferont à cette inégalité.

2° y étant positif, la courbe tournera sa convexité vers l'axe des x dans le voisinage du point $M(x,y)$, quand on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0,$$

et l'étendue relative à cette convexité sera déterminée par les limites des valeurs de x qui satisferont à cette inégalité.

2. COORDONNÉES POLAIRES.

Dans les courbes polaires, les caractères de concavité et de convexité seront aussi indiqués par les relations

$$\Delta\alpha < 0 \quad \text{et} \quad \Delta\alpha > 0;$$

donc aussi par les suivantes :

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta} > 0.$$

Mais on a :

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta} = \frac{d\alpha}{d\theta} + \frac{\Delta\theta}{2}\cdot\varphi''(\theta+\varepsilon\cdot\Delta\theta).$$

Donc, en supposant $\Delta\theta$ suffisamment petit, le signe du rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta}$ dépendra de celui de $\frac{d\alpha}{d\theta}$.

Mais on a trouvé (§ 42) :

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{r^2 + 2(\frac{dr}{d\theta})^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}.$$

Or, le dénominateur de cette expression est positif, donc le signe de $\frac{d\alpha}{d\theta}$, dépendra de celui de son numérateur.

Donc 1° la courbe polaire $r = f(\theta)$ sera concave dans le voisinage du point $M(r, \theta)$ lorsque l'on aura :

$$r^2 + 2(\frac{dr}{d\theta})^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} < 0,$$

2° elle tournera sa convexité vers l'axe des x, pour tous les points pris dans le voisinage de M, et répondant à des valeurs positives de $\Delta\theta$, qui satisfont à l'inégalité

$$r^2 + 2(\frac{dr}{d\theta})^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} > 0.$$

Remarque. Si y est négatif, Δx étant toujours positif, et les angles des tangentes avec l'axe des x, se comptant toujours dans le même sens à partir de l'axe des x, il est clair que le caractère de la concavité sera alors indiqué par la condition

$$\alpha < \gamma,$$

et celui de la convexité par

$$\alpha > \gamma.$$

Il est facile de conclure de là, que quand y est négatif le caractère de la concavité sera

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0,$$

et celui de la convexité sera

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$

Donc 1° dans le cas de concavité $\frac{d^2y}{dx^2}$ et y seront toujours de de signe contraire et l'on aura

$$y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} < 0. \qquad (1$$

2° Dans le cas de convexité $\frac{d^2y}{dx^2}$ et y sont toujours de même signe, on a donc

$$y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} > 0. \qquad (2$$

1^er^ *Exemple.* L'équation du cercle

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2,$$

donne $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r^2}{(y-\beta)^3}.$$

Donc $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera négatif quand on aura $y > \beta$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera positif quand on aura $y < \beta$.

Donc, le cercle tourne sa concavité vers l'axe des x dans tous les points, dont les ordonnées satisfont à l'inégalité $y > \beta$; il sera convexe dans toute l'étendue pour laquelle on a $y < \beta$.

2^me^ *Exemp.* Soit donnée la Parabole de Niel, dont l'équation est

$$y^3 = p^2x;$$

on aura : $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{\sqrt[3]{p^2}}{x^{\frac{4}{3}}}.$$

Donc, quand y est positif, ce qui suppose x positif, on aura $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, et la courbe sera concave vers l'axe des x.

Mais quand y est négatif, ce qui suppose que x soit aussi négatif, alors l'expression ci-dessus de $\frac{d^2y}{dx^2}$ deviendra positive, et la courbe sera encore concave, car on a, dans les deux cas $y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} < 0$.

§ 45.

Points d'Inflexion.

On nomme point d'inflexion d'une courbe, le point après lequel la courbe devient concave, si elle a été convexe avant ce point, et *vice-versa.*

Supposons que la courbe $y = fx$ soit concave dans l'étendue

depuis $x=b$ jusqu'à $x=a$, on aura, pour cette étendue

$$y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}>0.$$

Si elle devient ensuite convexe depuis $x=a$ jusqu'à $x=c$, il est clair que pour cette autre étendue de la courbe, on a

$$y\cdot\frac{dy}{dx^2}>0.$$

Donc, au point d'inflexion, qui répond à $x=a$, le produit $y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$, qui passe, en cet endroit, du négatif au positif, doit être 0 ou $\frac{1}{0}$; donc les valeurs déduites de l'une des équations

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0,\quad \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}=0,$$

répondront à des points d'inflexion.

Cependant il est à remarquer que les valeurs tirées de ces équations ne doivent pas annuler $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., car sans cela le point pourrait convenir à une ordonnée maximum ou minimum et ne pas être un point d'inflexion.

Quand la courbe est polaire les coordonnées du point d'inflexion se déduiront des équations

$$r=f(\theta),$$

et
$$r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\,\frac{d^2r}{d\theta^2}=\begin{cases}\infty\\0\end{cases}.$$

1^er^ *Exemple.* De l'équation

$$y=x+36x^3+2x^5-x^6$$

on tire

$$\frac{dy}{dx}=1+72x+6x^2-4x^5,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=72+12x-12x^2$$

$$=12(6+x-x^2).$$

Donc $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, répond à $6+x-x^2=0$ ou à $x=3$, $x=-2$.

Ces valeurs ne rendent nulles aucune des dérivées d'ordre impair. A $x=3$ répond $y=300$; à $x=-2$ répond $y=142$; donc les points

$$M(3;300),\ M'(-2;142),$$

sont des points d'inflexion.

2^me^ *Exemp.* Soit $x^2y+a^2y-ax^3=0$ ou $y=\frac{ax^2}{a^2+x^2}$, on aura :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2a^3x}{(a^2+x^2)^2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2a^3(a^2-3x^2)}{(a^2+x^2)^3}.$$

Donc $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, donne $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$; à ces abscisses répond $y=\frac{a}{4}$; donc

$$M\left(\frac{a}{4},\frac{a}{\sqrt{3}}\right),\ M'\left(\frac{a}{4},-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

sont des points d'inflexion.

3^me^ *Exemp.* Soit $a^4y=(x-b)^5$; on trouve :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{a^4}(x-b)^4,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{20}{a^4}(x-b)^3,\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{60}{a^4}(x-b)^2,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{120}{a^4}(x-b),\quad \frac{d^5y}{dx^5}=120.$$

$\frac{d^2y}{dx^2}=0$, donne $x=b$, donc $y=0$. Mais ces valeurs rendent nuls $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, sans rendre nul $\frac{d^5y}{dx^5}$; et comme cette dérivée est d'ordre impair, le point $M(0,b)$ ne répond pas à un maximum ou à un minimum, mais est un point d'inflexion.

4^me^ *Exemp.* L'équation $y=a^{\frac{2}{3}}x+(x-b)^{\frac{5}{3}}$ donne

$$\frac{dy}{dx}=a^{\frac{2}{3}}+\tfrac{5}{3}(x-b)^{\frac{2}{3}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{10}{9(x-b)^{\frac{1}{3}}}.$$

Donc, en posant

$$\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}=0,\quad \text{ou}\quad 9(x-b)^{\frac{1}{3}}=0,\ \text{on trouve}\ x=b;$$

donc $y = a^{\frac{3}{3}}b$; ce point $M(b, a^{\frac{3}{3}}b)$ est un point d'inflexion.

En effet, pour $x = b + h$ on a $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{10}{9h^{\frac{1}{3}}} > 0$; donc la courbe est convexe dans l'endroit qui répond à $x = b + h$. Pour $x = b - h$, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{10}{9h^{\frac{1}{3}}} < 0;$$

donc la courbe est concave dans l'endroit qui répond à $x = b - h$. Donc, au point $x = b, y = a^{\frac{3}{3}}b$, la concavité passe à la convexité, ce qui caractérise le point d'inflexion.

5^me^ *Exemp.* Chercher le point d'inflexion du lituus

$$r = \pm \frac{ka^{\frac{1}{2}}}{\theta^{\frac{1}{2}}}.$$

On a $\frac{dr}{d\theta} = \mp \frac{ka^{\frac{1}{2}}}{2\theta^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{d^2r}{d\theta^2} = \pm \frac{3ka^{\frac{1}{2}}}{4\theta^{\frac{5}{2}}}$; donc la condition

$$r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} = 0$$

devient $4k^2a\theta^5 + 2k^3a \pm 3k^2a = 0$,

ou $4\theta^2 = 1$.

Donc $\theta = \frac{1}{2}$, $r = k\sqrt{2a}$ est un point d'inflexion.

§ 45^bis^.

Points de Rebroussement.

Un *point de rebroussement* est le point de contact de deux branches d'une courbe, auquel le cours de la courbe est brusquement interrompu. Ces deux branches auront par conséquent au point de rebroussement une seule tangente.

Les deux branches pourront être situées d'un même côté de la tangente commune, où celle-ci peut passer entre les deux branches. Dans le 1^er^ cas les deux branches seront à la fois concaves ou convexes par rapport à l'axe des x, et dans le 2^me^ cas l'une des deux branches tournera sa concavité, l'autre sa convexité vers cet

axe. Dans ce dernier cas le rebroussement est dit de la 1re espèce ; dans l'autre il est de la 2de espèce.

Soit $M(a,b)$ un point de rebroussement ; comme le cours de la courbe $y=fx$, s'arrête brusquement en M, il faut qu'en y posant $x=a+h$ ou $x=a-h$, les valeurs correspondantes de y soient imaginaires, quelque petit que soit h.

Comme dans le cas du rebroussement de l'une et de l'autre espèce, les deux branches n'ont qu'une seule tangente commune, pour que $M(a,b)$ soit un tel point, il faut que la dérivée $\frac{dy}{dx}$ se réduise à deux valeurs égales, quand on y remplace x,y par a et b.

Mais un point de rebroussement de la 1re espèce exige de plus que les deux branches aient des courbures diverses, que l'une soit concave et l'autre convexe. Il faut donc qu'en remplaçant dans la dérivée 2de $\frac{d^2y}{dx^2}$, l'abscisse x par $a+h$ ou par $a-h$ on obtienne deux valeurs de signe contraire quelque petit que soit h.

Nous avons donc, en résumé, les caractères analytiques suivants pour le rebroussement de la 1re espèce :

Le point $M(a,b)$ de la courbe $y=fx$ est un point de rebroussement de la 1re espèce :

1° Quand y devient imaginaire pour $x=a+h$ ou pour $x=a+h$ quelque petit que soit h ;

2° Quand $\frac{dy}{dx}$ se réduit à une valeur réelle unique pour $x=a$, $y=b$;

3° Quand $\frac{d^2y}{dx^2}$ a deux valeurs de signe contraires pour $x=a+h$ ou pour $x=a-h$ quelque petit que soit h.

Supposons maintenant que le point $M(a,b)$ soit un point de rebroussement de la 2de espèce, il est d'abord clair qu'alors la valeur de y, correspondante à $x=a+h$ ou à $x=a-h$, doit être imaginaire, quelque petit que soit h.

Il faut ensuite que $\frac{dy}{dx}$ prenne deux valeurs égales pour $x=a$, $y=b$. Mais les deux branches, qui rebroussent chemin en M, ont, quand M est de la 2de espèce, des courbures pareilles, c'est-à-dire

qu'elles sont toutes les deux concaves ou convexes. Il faut donc que $\frac{d^2y}{dx^2}$ conserve le même signe quand on y remplace x par $a+h$ ou par $a-h$, quelque petit que soit h.

Nous avons donc en résumé les caractères suivants :

Un point $M(a,b)$ est un point de rebroussement de la 2de espèce, lorsque

1° y devient imaginaire pour $x=a+h$ ou $x=a-h$,

2° $\frac{dy}{dx}$ prend une valeur unique pour $x=a$, $y=b$.

3° $\frac{d^2y}{dx^2}$ reçoit deux valeurs de même signe pour $x=a+h$, $x=a-h$.

Rem. Nous verrons, dans la théorie des points multiples, par quels procédés on obtient les points $M(a,b)$, qui peuvent être des points de rebroussement de l'une ou de l'autre espèce.

1er *Exemple.* Soit l'équation $y=b\pm(x-a)^{\frac{3}{2}}$; on trouve :

$$\frac{dy}{dx}=\pm\tfrac{3}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\pm\tfrac{3}{4}(x-a)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0 \text{ donne } x=a, \text{ donc } y=b.$$

Mais 1° $x=a-h$ donne $y=b\pm\sqrt{(-h)^3}$; donc y est imaginaire.

2° Pour $x=a$ la dérivée $\frac{dy}{dx}$ reçoit la valeur réelle unique zéro.

3° Pour $x=a+h$ on a $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4\sqrt{h}}$, et $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{3}{4\sqrt{h}}$.

De tout cela on conclut que le point $M(a,b)$ de la courbe ci-dessus, est un point de rebroussement de la 1re espèce.

2^{me} *Exemp.* Soit $y=a+x+bx^2+cx^{\frac{5}{2}}$, d'où :

$$\frac{dy}{dx}=1+2bx+\tfrac{5}{2}cx^{\frac{3}{2}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2b+\tfrac{15}{4}cx^{\frac{1}{2}}.$$

$x = 0$ donne $y = a$, $\frac{dy}{dx} = 1$. De plus, pour $x = 0 - h$ y devient imaginaire; pour $x = 0 + h$ la dérivée $\frac{d^2y}{dx^2}$ reçoit les deux valeurs positives

$$2b + \frac{15c}{4}\sqrt{h}, \quad 2b - \frac{15c}{4}\sqrt{h},$$

h étant suffisamment petit. Donc le point $M(0, a)$ est un point de rebroussement de la 2de espèce.

§ 46.

Points Conjugués.

Un point conjugué est un point isolé compris dans l'équation donnée $y = fx$ d'une courbe.

Soit $M(a, b)$ un tel point, il est clair que a et $b = fa$, seront des quantités réelles. Donnons à l'abscisse un accroissement réel quelconque Δa positif ou négatif, il est clair que l'ordonnée $b + \Delta b$ correspondante à l'abscisse $a + \Delta a$ sera imaginaire, et qu'il en sera de même quant au rapport $\frac{\Delta b}{\Delta a}$. Mais on a, par le Théorème de Taylor :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} + \text{etc.}$$

Il est donc clair que si $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est imaginaire, il faut que l'un des coëfficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., ou que plusieurs de ces coëfficients soient imaginaires à la fois.

On a donc les caractères suivants pour distinguer les points conjugués des courbes :

Le point $M(x = a, y = b)$ de la courbe $y = fx$ ou $F(x, y) = 0$ sera un point conjugué quand :

1° a et $b = fa$ sont réels ;

2° Quand une ou plusieurs des quantités $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., sont imaginaires pour $x = a$, $y = b$.

Nous ferons connaître, dans le § suivant, les procédés par lesquels on obtient les points M(a, b) qui peuvent être des points conjugués.

1er *Exemple.* L'équation $ay^2 = x(x+b)^2$ donne

$$y = \pm (x+b)\sqrt{\frac{x}{a}}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2\sqrt{a}} \left\{ 3\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}} \right\}.$$

Quand on prend $x = -b$, on trouve $y = 0$; ces deux valeurs sont réelles. Mais pour ces valeurs on a

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{-\frac{b}{a}},$$

valeurs imaginaires. Donc le point M$(0, -b)$ est un point conjugué.

2^{me} *Exemp.* L'équation $x^2y^2 = (a^2 - x^2)(x - 2a)^2$, donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2a)(a^2 + 2ax - 2x^2)}{xy(x+y)}.$$

Pour $x = 2a$ on a $y = 0$, ce qui réduit $\frac{dy}{dx}$ à $\frac{0}{0}$. Il faut donc chercher la vraie valeur de $\frac{dy}{dx}$. Or, en différentiant les deux termes de la fraction ci-dessus, on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2 + 4ax + 3a^2}{2xy + y^2 + (x^2 + 2xy)\frac{dy}{dx}}; \quad \text{d'où}$$

$$(2xy + y^2)\frac{dy}{dx} + (x^2 + 2xy)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -(6x^2 + 4ax + 3a^2).$$

Pour $x = 2a$, $y = 0$, on a $4a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -35a^2$; donc :

$$\frac{dy}{dx} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-35}.$$

Donc M$(2a, 0)$ est un point conjugué.

§ 47.

Points Multiples.

Les *points multiples* d'une courbe sont des points dans lesquels plusieurs branches d'une courbe se coupent ou se touchent. Le

point est double, triple, etc., selon qu'il se rapporte à deux, trois, etc. branches, dont il est le point d'intersection ou de contact.

Un point multiple M est caractérisé par la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en ce point.

1° Si $\frac{dy}{dx}$ a plusieurs valeurs réelles et inégales, le point M sera un point multiple proprement dit, résultant de l'intersection en M de plusieurs branches réelles de la courbe. Les valeurs diverses et inégales de $\frac{dy}{dx}$ seront celles des tangentes trigonométriques des angles que les tangentes en M aux diverses branches de la courbe qui se coupent en ce point, font avec l'axe des x.

2° Si $\frac{dy}{dx}$ a deux, trois, etc., valeurs réelles et égales, le point M sera un point multiple résultant du contact en ce point de deux, trois, etc. branches de la courbe.

3° Dans le cas où $\frac{dy}{dx}$ a deux valeurs réelles inégales, le point M peut être un point double.

4° Si $\frac{dy}{dx}$ a deux valeurs réelles et égales, le point M peut être un point de rebroussement de la 1re ou de la 2de espèce, et alors, pour s'en assurer, il faudra recourir aux règles que nous avons données pour reconnaître la présence des points de rebroussement.

5° Lorsque les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondantes au point M sont imaginaires, ce point pourra être un point conjugué, et il faudra pour s'en assurer, suivre les procédés indiqués pour constater la présence de tels points.

6° Observons que le point M, étant un point de la courbe donnée, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondantes à ce point devront satisfaire à l'équation donnée de la courbe.

D'après cela, soit $u = f(x, y) = 0$ (1)

l'équation donnée de la courbe; on en déduira :

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Mais pour le point multiplié M, le rapport $\frac{dy}{dx}$ à plusieurs va-

leurs, par conséquent, pour un tel point, l'équation précédente ne pourra être satisfaite qu'en posant

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=0,\quad \left(\frac{du}{dy}\right)=0. \qquad (2)$$

Les équations (2) fourniront pour x et y, en général, plusieurs systèmes de valeurs correspondantes tels que

$$x=a,\quad x=a',\ \text{etc.}$$
$$y=b,\quad y=b',\ \text{etc.}$$

et il n'y aura que des valeurs telles que $x=a, y=b$, prises parmi ces systèmes, qui pourront être les coordonnées de points multiples.

D'après la remarque 6°, il faudra d'abord exclure parmi ces systèmes de valeurs, ceux qui ne satisferaient pas à l'équation (1). Supposons que $x=a, y=b$, soit l'un des systèmes qui satisfont à cette équation. Comme on a :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}, \qquad (3)$$

et que pour $x=a, y=b$ on a $\left(\frac{du}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{du}{dy}\right)=0$, on aura

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}.$$

Il faut donc chercher la vraie valeur de (3), correspondante à $x=a, y=b$, alors plusieurs cas pourront se présenter :

1° Si la vraie valeur de $\frac{dy}{dx}$ est une valeur unique, le point $M(x=a, y=b)$ ne sera pas un point multiple.

2° Si $\frac{dy}{dx}$ donne deux ou plusieurs valeurs imaginaires le point $M(x=a, y=b)$ sera un point conjugué.

3° Si $\frac{dy}{dx}$ donne deux valeurs réelles et inégales, le point $M(x=a, y=b)$ sera un point double d'intersection.

Si $\frac{dy}{dx}$ donne deux valeurs réelles et égales, le point $M(x=a, y=b)$ sera un point double de contact ou un point de rebroussement de la 1re ou de la 2de espèce.

4° Si $\frac{dy}{dx}$ a trois, quatre, etc., valeurs réelles, le point

$M(x=a, y=b)$ sera un point triple, quadruple, etc., d'intersection ou de contact, selon que ces valeurs seront inégales ou égales.

5° $\frac{dy}{dx}$ ayant une valeur réelle, si on a en outre $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, sans que le coëfficient différentiel du 3me ordre soit nul en même temps, le point $M(a,b)$ sera un point d'inflexion.

Rem. Les points d'inflexion et multiples sont aussi désignés par le terme de *points singuliers*. Nous comprenons parmi les points multiples les points conjugués et les points de rebroussement.

1er *Exemple.* Soit $y-b=\pm(x-a)\sqrt{x}$, d'où : $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{3x-a}{2\sqrt{x}}$.

Pour $x=a$ on a $y=b$, $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{a}$. Donc le point $M(x=a, y=b)$ est un point double.

2me *Exemp.* Soit $u=y^3-3axy+x^3=0$; (1)

on a :
$$\left.\begin{aligned}(\tfrac{du}{dx})&=ay-x^2=0,\\(\tfrac{du}{dy})&=y^2-ax=0.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Les deux dernières donnent en les ajoutant :

$$(y-x)(y+x+a)=0,$$

elles sont donc satisfaites par

$$y=x,$$
$$y=-(a+x).$$

1° Pour $y=x$, l'équation (1) donne $x=0$ et $x=\frac{3}{2}a$, valeurs dont la 1re seule satisfait aux équations (2). On a donc un premier point $M(x=0, y=0)$, qui pourra être un point multiple.

Mais on a :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}. \quad (3)$$

Pour $x=0, y=0$, cette expression devient $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$. Cherchons la vraie valeur de (3). Or, en différentiant, le numérateur

et le dénominateur du 2ᵈ membre de (3), la vraie valeur de $\frac{dy}{dx}$, s'obtiendra en résolvant l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\frac{dy}{dx} - 2x}{2y\frac{dy}{dx} - a},$$

par rapport à $\frac{dy}{dx}$, puis en posant, dans le résultat, $x=0, y=0$.

Ces opérations conduisent aux deux valeurs

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{0}.$$

D'où il suit que le point $M(x=0, y=0)$, est un point double.

2° Pour $y=-(a+x)$, l'équation $u=0$, n'est pas satisfaite car elle donne $a^5=0$. Il faut donc rejeter la valeur $y=-(a+x)$.

3ᵐᵉ *Exemp.* Soit l'équation $u=(y-x-x^2)^2-x^5=0$, (1)

ou $$y-x-x^2 \mp x^{\frac{5}{2}}=0. \quad (2)$$

On aura : $(\frac{du}{dx}) = -2(y-x-x^2)(1+2x)-5x^4=0,$

$$(\frac{du}{dy}) = 2(y-x-x^2)=0.$$

Ces deux équations fournissent $x=0, y=0$, valeurs qui satisfont à l'équation (1). Donc le point $M(x=0, y=0)$, peut être un point multiple. Mais on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(y-x-x^2)(1+2x)+5x^4}{2(y-x-x^2)}. \quad (3)$$

Cette valeur réduit à $\frac{0}{0}$ quand on pose $x=0, y=0$. Mais en différentiant les deux termes du 2ᵈ membre de (3), et en résolvant l'équation résultante par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = 1+2x \pm \sqrt{2(y-x-x^2)+10x^5}.$$

$x=0, y=0$ donne pour $\frac{dy}{dx}$, deux valeurs, savoir :

$$\frac{dy}{dx} = 1+0, \quad \frac{dy}{dx} = 1-0.$$

Il suit de là que le point $M(x=0, y=0)$, est un point double de contact ou un point de rebroussement. Mais l'équation (2) donne $y = x + x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$, d'où $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x}$. Quand on conçoit h suffisamment petit, l'on voit que y devient imaginaire pour $x=0-h$, et que $\frac{d^2y}{dx^2}$ reçoit deux valeurs positives pour $x=0+h$; donc le point $M(x=0, y=0)$ est un point de rebroussement de la 2de espèce.

4^{me} *Exemp.* L'équation de la lemniscate est

$$u = y^4 + (2x^2 + a^2)y^2 - a^2x^2 + x^4 = 0. \qquad (1)$$

On en tire :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right) &= [a^2 - 2(y^2+x^2)]x = 0, \\ \left(\frac{du}{dy}\right) &= [a^2 + 2(y^2+x^2)]y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Comme $a^2+2(x^2+y^2)$ ne peut pas devenir nul pour des valeurs réelles de x et de y, on déduira des équations (2) les deux systèmes de valeurs

$$(3)\quad \left\{\begin{matrix} y=0 \\ x=0 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} y=0 \\ 2y^2+2x^2-a^2=0 \end{matrix}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{matrix} y=0 \\ x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right\} (4)$$

Il faudra rejeter le système (4), puisqu'il ne satisfait pas à l'équation $u=0$. Mais le système (3) satisfaisant à l'équation (1) le point $M(x=0, y=0)$, qui est l'origine des coordonnées pourra être un point multiplié. Pour s'en assurer cherchons la vraie valeur de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[2(y^2+x^2) - a^2]x}{[2(y^2+x^2) + a^2]y}, \qquad (5)$$

qui pour $x=0, y=0$ devient $\frac{0}{0}$. Or, en différentiant les deux termes de (5), et en chassant le dénominateur, on trouve

$$\{6y^2 + 2x^2 + a^2\}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 8xy\frac{dy}{dx} + 2y^2 + 6x^2 - a^2 = 0.$$

En posant dans celle-ci $x=0$, $y=0$, on trouve $\frac{dy}{dx} = \pm 1$.

Donc le point $M(x=0, y=0)$ est un point double, et l'on voit que les deux tangentes à la courbe, en ce point, se coupent à angle droit.

En différentiant l'équation (1) trois fois, on trouve :

$$\left\{2(y^2+x^2)+a^2\right\}y\frac{d^3y}{dx^3}+3\left\{(6y^2+2x^2+a^2)\frac{dy}{dx}+4xy\right\}\frac{d^2y}{dx^2}+$$
$$12y\frac{dy^3}{dx^3}+12x\frac{dy^2}{dx^2}+12y\frac{dy}{dx}+12x=0.$$

Or, pour $x=0, y=0, \frac{dy}{dx}=\pm 1$, cette équation donne :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0;$$

donc le point $M(x=0, y=0)$ est, en même temps, un point d'inflexion; car on peut s'assurer facilement que le coëfficient différentiel du 3^{me} ordre ne devient pas nul pour $x=0, y=0$.

§ 47^a.

Des Courbes parallèles.

Une courbe $F(X,Y)=0$ est parallèle à une courbe donnée $f(x,y)=0$, lorsqu'elle est partout également distante de celle-ci, c'est-à-dire, lorsque les portions des normales aux divers points de la courbe $f=0$, comprises entre les deux courbes, ont une longueur constante l.

Problème. *Étant donnée l'équation* $f(x,y)=0$ *d'une courbe, trouver l'équation d'une courbe* $F(X,Y)=0$, *parallèle à la première.*

Solution. L'équation de la normale au point $M'(x',y')$ de la courbe donnée est

$$(y-y')\frac{dy'}{dx'}+(x-x')=0.$$

Cette normale rencontre la courbe cherchée en un point que je désignerai par $N'(X',Y')$. Soit l la distance constante entre les points M' et N', on aura les deux équations

$$(Y'-y')\frac{dy'}{dx'}+(X'-x')=0,$$
$$(Y'-y')^2+(X'-x')^2=l^2.$$

Comme ces équations subsistent entre deux points correspon-

dants quelconques M(x,y), N(X,Y) des deux courbes, on aura :

$$(Y-y)\frac{dy}{dx}+(X-x)=0, \qquad (1$$

$$(Y-y)^2+(X-x)^2=l^2. \qquad (2$$

On aura de plus les deux équations

$$f(x,y)=0, \qquad (3$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=0. \qquad (4$$

Si l'on élimine entre ces quatre équations, les trois quantités x, y, $\frac{dy}{dx}$, on aura une équation entre X et Y de la forme $F(X,Y)=0$, qui sera l'équation cherchée.

Exemple. *Trouver la courbe* $F(X,Y)=0$, *parallèle au cercle*

$$x^2+y^2-r^2=0,$$

l *étant l'équidistance constante des points correspondants des deux courbes.*

On a ici les quatre équations

$$(Y-y)\frac{dy}{dx}+(X-x)=0,$$

$$(Y-y)^2+(X-x)^2=l^2,$$

$$x^2+y^2=r^2,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

On en tire : $y=\frac{r}{r\pm l}\cdot Y$, $x=\frac{r}{r\pm l}\cdot X$,

et en substituant ces valeurs dans la 3^{me} de ces quatre équations, on aura

$$Y^2+X^2=(r\pm l)^2;$$

c'est l'équation cherchée.

§ 47ᵇ.

Des Courbes enveloppes.

Si dans une courbe $f(x,y,a)=0$, la constante a varie d'une manière continue, on obtiendra une suite continue de courbes $f_1=0$, $f_2=0$, etc., de la même espèce que la proposée, que l'on appelle *enveloppées;* une courbe $F(X,Y)=0$, tangente à toutes ces enveloppées $f_1=0, f_2=0$, etc., se nomme *courbe enveloppante*, ou simplement *enveloppe.*

Problème. *Étant donnée l'équation* $f(x,y,a)=0$, *trouver sa courbe enveloppe* $F(X,Y)=0$.

Règle. Soit $f=f(x,y,a)=0$; éliminez a entre $f=0$, et $\frac{df}{da}=0$, le résultat de cette élimination sera l'équation cherchée $F(X,Y)=0$.

Démonstration. Les coordonnées X et Y de la courbe cherchée $F=0$, sont évidemment des fonctions de la constante a, telles que $X=\xi a$, $Y=\psi a$. Si donc on connaissait les fonctions ξ et ψ, on n'aurait qu'à éliminer entre elles la constante a pour obtenir l'équation cherchée.

Mais puisque la courbe enveloppe est tangente aux enveloppées, on a évidemment

$$X=x,\ Y=y,\quad \frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx}. \qquad (1$$

$$f(X,Y,a)=0 \quad \text{ou} \quad f(\xi a,\psi a,a)=0. \qquad (2$$

On a donc aussi, par cette dernière équation $\frac{df}{da}=0$, ou $\frac{df(X,Y,a)}{da}=0$. (4). Les équations (2) et (4) conduisent aux valeurs $X=\xi a$, $Y=\psi a$. Donc, en éliminant a entre les équations (2) et (4), ou, à cause des relations (1, entre les suivantes :

$$f(x,y,a)=0,\quad \frac{df(x,y,a)}{da}=0,$$

on aura l'équation cherchée $F(X,Y)=0$ ou $F(x,y)=0$.

Rem. Pour que l'équation trouvée $F=0$, soit une courbe enveloppe, il faut qu'en déterminant a, à l'aide de cette équation, on trouve pour cette constante une fonction de x ou de y.

1^er^ *Exemple.* Le centre d'un cercle donné se meut sur une courbe donnée, trouver l'enveloppe du cercle mobile.

Soient $\varphi(\alpha,\beta)=0$, l'équation de la courbe donnée, a le rayon du cercle, x, y ses coordonnées courantes, et par conséquent

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=0, \qquad (1$$

son équation, on aura par différentiation :

$$(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(x-\alpha)=0. \qquad (2$$

En éliminant α et β entre (1, (2, et l'équation $\varphi=0$, on obtiendra une équation entre x et y, qui sera l'équation cherchée.

2^me^ *Exemp.* Le centre d'un cercle décrit une courbe donnée, sa circonférence passe continuellement par un point donné, trouver l'équation de la courbe enveloppe.

Soient O, origine des coordonnées, le point donné, a, b les coordonnées du centre du cercle, son équation fera

$$y^2+x^2-2by-2ax=0. \qquad (1)$$

Soit $\varphi(x,y)=0$, l'équation de la courbe donnée, on aura $\varphi(a,b)=0$; d'où $b=\psi a$.

b étant une fonction de a, la différentielle de l'équation (1) donnera :

$$y\frac{db}{da}+x=0. \qquad (2)$$

En éliminant a et b, entre les équations (1), (2) et $\varphi(a,b)=0$, on obtiendra une équation entre x et y qui sera l'équation cherchée.

§ 48.

Rayon de Courbure.

1. coordonnées rectangulaires.

Soient pris sur la courbe quelconque $y=fx$, les trois points consécutifs

$$M(x,y),\quad M'(x+\Delta x,\ y+\Delta y),\quad M''(x+2\Delta x,\ y_1+\Delta y_1),$$
$$y_1=y+\Delta y,$$

et élevons aux milieux des cordes MM', M'M'' des perpendiculaires qui se couperont en un point O. Ce point sera le centre du cercle qui passe par les 3 points M, M', M''. Soit δ l'arc pour le rayon 1, qui mesure l'angle formé en O par les deux perpendiculaires. Soient μ et μ' les milieux des arcs du cercle passant par M M' M'', correspondants aux cordes MM', M'M''. Si nous menons à ce cercle des tangentes dont les points de contacts soient μ et μ', l'angle formé par ces tangentes aura aussi pour mesure δ, car ces deux angles auront leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun. Mais en désignant par α l'angle que la tangente au point μ fait avec l'axe des x, et par γ l'angle que la tangente au point μ' fait avec l'axe des x, l'angle compris par les deux tangentes, sera égal à $\alpha-\gamma$; on a donc

$$\delta=\alpha-\gamma=\Delta\alpha.$$

Mais en désignant par R le rayon du cercle dont O est le centre et qui passe par les trois points M, M', M'', et par Δs l'arc $\mu\mu'$, on aura la proportion

$$\delta : 1 :: \Delta s : R,\quad \text{ou}\quad \Delta\alpha : 1 :: \Delta s : R;$$

d'où
$$R=\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}=\frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}.$$

Soit maintenant ς ce que devient R pour $\Delta x=0$, ou pour le cas dans lequel les points M', M'' viennent à coïncider avec le point M; ς sera ce qu'on nomme le *rayon de courbure;* et le cercle qui a ς pour rayon se nomme le *cercle de courbure.* Mais ς est une fonction de x tel qu'en y changeant x en $x+\Delta x$, on obtienne R ; on peut donc poser $R=\varsigma+\Delta x\cdot k$, $\Delta x\cdot k$ devenant nul avec Δx. On aura donc

$$\varsigma + \Delta x \cdot k = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\frac{\Delta \alpha}{\Delta x}}.$$

Si nous représentons par $\Delta s'$ l'arc de la courbe correspondant à l'arc Δs du cercle de courbure, on pourra poser évidemment

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s'}{\Delta x} \pm k''' \cdot \Delta x,$$

puisque pour $\Delta x = 0$, les deux rapports $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, $\frac{\Delta s'}{\Delta x}$, coïncident. On a donc

$$\varsigma + \Delta x \cdot k = \frac{\frac{\Delta s'}{\Delta x} \pm k'' \cdot \Delta x}{\frac{\Delta \alpha}{\Delta x}}.$$

Mais on a trouvé $\frac{\Delta s'}{\Delta x} = \frac{ds'}{dx} + N \cdot \Delta x$,

et $\frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \frac{d\alpha}{dx} + P \cdot \Delta x$,

$N \cdot \Delta x$ et $P \cdot \Delta x$ s'évanouissant avec Δx. On a, par conséquent

$$\varsigma + \Delta x \cdot k = \frac{\frac{ds'}{dx} + \Delta x (N \pm k'')}{\frac{d\alpha}{dx} + \Delta x \cdot P}.$$

Donc, en faisant $\Delta x = 0$, on a :

$$\varsigma = \frac{\frac{ds'}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}} = \frac{ds'}{d\alpha}.$$

Mettons pour $\frac{ds'}{dx}$ et $\frac{d\alpha}{dx}$, leurs valeurs trouvées dans les § 39, 41, on a :

$$\varsigma = \frac{\frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}}{\frac{}{1 + (\frac{dy}{dx})^2}} = \frac{\left[1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

c'est l'expression de la valeur du rayon de courbure. — Déterminons en second lieu les coordonnées α et β du centre O′ du cercle de courbure.

A cet effet on a l'équation

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varsigma^2;$$

c'est l'équation du cercle de courbure au point $M(x,y)$ de la courbe. Différentions cette équation deux fois, nous trouverons :

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+x-\alpha=0,$$

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+1+(\frac{dy}{dx})^2=0.$$

De ces deux équations on tire :

$$y-\beta=-\frac{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$x-\alpha=\frac{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

On a donc enfin :

$$\beta=y+\frac{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}{\frac{d^2y}{dx^2}},\quad \alpha=x-\frac{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Remarque. Si pour une valeur particulière $x=a$, on trouve $\frac{d\varsigma}{dx}=0$, il est clair que pour le point de la courbe, qui répond à cette valeur, ς sera un maximum ou un minimum selon que $\frac{d^2\varsigma}{dx^2}$ sera négative ou positive.

2. COORDONNÉES POLAIRES.

On a trouvé $\varsigma=\frac{ds'}{d\alpha}$, on a donc aussi :

$$\varsigma = \frac{\frac{ds'}{d\theta}}{\frac{d\alpha}{d\theta}}.$$

Mais on a trouvé § 39

$$\frac{ds'}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}},$$

et dans le § 49, on a trouvé

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{r^2 + 2(\frac{dr}{d\theta})^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2},$$

on a donc

$$\varsigma = \frac{(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2})^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2(\frac{dr}{d\theta})^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

APPLICATION DES FORMULES PRÉCÉDENTES.

1^er^ *Exemple.* Le Tableau suivant se rapporte au Calcul du rayon de courbure, et des coordonnées du centre de courbure des 3 sections coniques.

	Ellipse. $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$.	Hyperbole. $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$.	Parabole. $y^2=px$.
$\frac{dy}{dx}=$	$-\frac{b^2x}{a^2y}$	$\frac{b^2x}{a^2y}$	$\frac{p}{2y}$.
$\frac{d^2y}{dx^2}=$	$-\frac{b^4}{a^2y^3}$	$\frac{b^4}{a^2y^3}$	$-\frac{p^2}{4y^3}$.
$1+(\frac{dy}{dx})^2=$	$\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}$	$\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}$	$\frac{4y^2+p^2}{4y^2}$.
$\varsigma=$	$-\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$	$\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$	$\frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$.
$e^2=$	a^2-b^2	a^2+b^2	$y^2=px$.
$\varsigma=$	$-\frac{(a^4-e^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$	$\frac{(e^2x^2-a^4)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$	$\frac{(4x+p)^{\frac{3}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}$.
long. de la norm. ou $N_0=$	$\frac{1}{a^2}\left\{a^4y^2+b^4x^2\right\}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{a^2}\left\{a^4y^2+b^4x^2\right\}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}(4y^2+p^2)^{\frac{1}{2}}$.
$=$	$\frac{b}{a^2}(a^4-e^2x^2)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{b}{a^2}(e^2x^2-a^4)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}(4x+p)^{\frac{1}{2}}$.
	d'où		
$\varsigma=$	$-\frac{a^2N_0^3}{b^4}$	$\frac{a^2N_0^3}{b^4}$	$\frac{4N_0^3}{p^2}$.
soit p le paramèt., on a : $p=$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$	$p=p$.
donc $\varsigma=$	$-\frac{4N_0^3}{p^2}$	$\frac{4N_0^3}{p^2}$	$\frac{4N_0^3}{p^2}$.
soit $D=\frac{1}{2}p$, on a $\varsigma=$	$-\frac{N_0^3}{D^2}$	$\frac{N_0^3}{D^2}$	$\frac{N_0^3}{D^2}$.

2^me *Exemple.* Soit $xy = m^2$ l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m^2}{x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2m^2}{x^3}.$$

Donc $\varsigma = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{2m^2}$, $\alpha = \frac{3m^4+y}{2m^2y}$, $\beta = \frac{3m^4+x^2}{2m^2x}$.

3^me *Exemple.* La chaînette a pour équation

$$x = \frac{m}{2}\left\{e^{\frac{y}{m}} + e^{-\frac{y}{m}}\right\}.$$

On trouve, par conséquent,

$$\varsigma = -\frac{m}{4}\left\{e^{\frac{y}{m}} + e^{-\frac{y}{m}}\right\}^2 = -\frac{x^2}{m},$$

$$\alpha = 2x, \ \beta = y - \frac{m}{4}\left\{e^{\frac{2y}{m}} - e^{-\frac{2y}{m}}\right\}.$$

4^me *Exemple.* La spirale logarithmique a pour équation

$$r = e^{m\theta}.$$

Donc $\frac{dr}{d\theta} = e^{m\theta}\cdot m$, $\frac{d^2r}{d\theta^2} = m^2\cdot e^{m\theta}$. On trouve par conséquent

$$\varsigma = \frac{(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2})^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2(\frac{dr}{d\theta})^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}} = r(1+m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

§ 49.

Développante et Développée.

1. coordonnées rectangulaires.

On nomme *développée* le lieu des centres des rayons de courbure correspondants aux divers points de la courbe $y = fx$. La courbe $y = fx$ se nomme la *développante*.

1er Problème. *Étant donnée l'équation de la développante* $y = fx$, *trouver l'équation de la développée* $F(\alpha, \beta) = 0$.

Soient α, β les coordonnées du centre de courbure du point quelconque $M(x,y)$ de la courbe $y = fx$, on aura

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varsigma^2,$$

et en différentiant deux fois :

$$\left.\begin{aligned} x - \alpha + (y - \beta)\frac{dy}{dx} &= 0, \\ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

En éliminant x et y entre les deux dernières et l'équation donnée

$$y = fx$$

de la développante, on aura une relation entre α et β, telle que

$$F(\alpha, \beta) = 0,$$

qui sera l'équation cherchée.

PROPRIÉTÉ DE LA DÉVELOPPÉE.

1.) La tangente a la développée est normale a la développante.

Soient $F(\alpha, \beta) = 0$, l'équation de la développée, $y = fx$ celle de la développante. La tangente au point $N(\alpha', \beta')$ de la développée a pour équation

$$\beta - \beta' = \frac{d\beta'}{d\alpha'}(\alpha - \alpha').$$

Soit $M(x,y)$ le point où cette tangente rencontre la développante, on aura

$$y' - \beta' = \frac{d\beta'}{d\alpha'}(x' - \alpha'). \qquad (1)$$

Mais on a, par les équations (α) :

$$\beta = y + \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \alpha = x - \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

En différentiant ces équations, dans lesquelles dx est constant,

on a : $$d\beta = 3dy - \frac{(dx^2 + dy^2)}{d^2y^2} \cdot d^3y,$$

$$d\alpha = -\frac{3dy^2}{dx} + \frac{(dx^2 + dy^2)}{(d^2y)^2} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot d^3y.$$

Multiplions la 1re par dy, la 2de par dx, on a, en ajoutant les produits :

$$d\beta\, dy + d\alpha\, dx = 0;$$

d'où : $$\frac{d\beta'}{d\alpha'} = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}.$$

donc l'équation (1) devient

$$y' - \beta' = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}(x' - \alpha'). \qquad (4)$$

D'un autre côté, la normale au point $M(x', y')$ de la développante a pour équation

$$y - y' = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}(x - x'),$$

ou $$y' - y = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}(x' - x).$$

L'on voit donc, par la formule (4), que cette équation est satisfaite pour $y = \beta'$, $x = \alpha'$; donc la normale en M passe par N. Mais par hypothèse, la tangente en N passe par M; donc la tangente à la développée, et la normale à la développante ont deux points communs, donc elles coïncident. L'on voit, en même temps, que ς' est le rayon de courbure correspondant à $M(x', y')$.

2. Soient N et N_n deux points de la développée, et menons deux tangentes à cette courbe en ces points; elles rencontreront la développante respectivement en des points que nous désignerons par M et M_n; soient $MN = \varsigma$, $M_nN_n = \varsigma_n$, et nommons S l'arc de la développée compris entre les points N et N_n, je dis que l'on aura :

$$S = \varsigma_n - \varsigma.$$

Démonstration. Soit $F(x,y)=0$ l'équation de la développée, il est clair que ς et S seront des fonctions de x telles que

$$\varsigma=\psi x,\quad S=\varphi x.$$

Changeons x en $x, x+\Delta x, x+2\Delta x, \ldots x+n\Delta x$ et soient

$$\varsigma_1=\psi(x+\Delta x),\quad \varsigma_2=\psi(x+2\Delta x),\ \ldots\ \varsigma_{n-1}=\psi(x+\overline{n-1}\,\Delta x),$$
$$\varsigma_n=\psi(x+n\Delta x);$$
$$S_1=\varphi(x+\Delta x),\ S_2=\varphi(x+2\Delta x),\ldots S_{n-1}=\psi(x+\overline{n-1}\,\Delta x),$$
$$S_n=\varphi(x+n\Delta x).$$

Cela posé, comme les rapports $\frac{\Delta\varsigma_p{}^x}{\Delta x}$, $\frac{\Delta s_p}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta S_p}{\Delta x}$, s'identifient, pour $\Delta x=0$, on pourra écrire les égalités :

$$\frac{\Delta\varsigma}{\Delta x}=\frac{\Delta S}{\Delta x}+\Delta x\cdot P,$$
$$\frac{\Delta\varsigma_1}{\Delta x}=\frac{\Delta S_1}{\Delta x}+\Delta x\cdot P_1,$$
$$\frac{\Delta\varsigma_2}{\Delta x}=\frac{\Delta S_2}{\Delta x}+\Delta x\cdot P_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\Delta\varsigma_{n-1}}{\Delta x}=\frac{\Delta_1 S^1{}_{n-1}}{\Delta x}+\Delta x\cdot P_{n-1}.$$

On a donc, en ajoutant :

$$\frac{\Delta\varsigma}{\Delta x}+\frac{\Delta\varsigma_1}{\Delta x}+\frac{\Delta\varsigma_2}{\Delta x}+\text{etc.}+\frac{\Delta\varsigma_{n-1}}{\Delta x}=\frac{\Delta S}{\Delta x}+\frac{\Delta S_1}{\Delta x}+\frac{\Delta S_2}{\Delta x}+$$
$$\text{etc.}+\frac{\Delta S_{n-1}}{\Delta x}+\Delta x\cdot Q,\ Q=P+P_1+\ldots+P_{n-1}.$$

Mais on a d'un autre côté :

$$\varsigma_1-\varsigma=\Delta\varsigma,\quad \varsigma_2-\varsigma_1=\Delta\varsigma_1,\quad \varsigma_3-\varsigma_2=\Delta\varsigma_2,\ \ldots$$
$$\varsigma_n-\varsigma_{n-1}=\Delta\varsigma_{n-1};$$

en ajoutant ces équations, et en divisant la somme par Δx, on trouve

$$\frac{\varsigma_n-\varsigma}{\Delta x}=\frac{\Delta\varsigma}{\Delta x}+\frac{\Delta\varsigma_1}{\Delta x}+\text{etc.}+\frac{\Delta\varsigma_{n-1}}{\Delta x}.$$

On a donc aussi :

$$\frac{\varsigma_n-\varsigma}{\Delta x}=\frac{\Delta S}{\Delta x}+\frac{\Delta S_1}{\Delta x}+\frac{\Delta S_2}{\Delta x}+\text{etc.}+\frac{\Delta S_{n-1}}{\Delta x}+\Delta x\cdot Q.$$

Mais on a, par la Formule de Taylor :

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \varphi' x + \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} \cdot \varphi''(x + \varepsilon \cdot \Delta x) = \varphi' x + \Delta x \cdot R,$$

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta x} = \varphi'(x + \Delta x) + \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} \varphi''(x + \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x) = \varphi'(x + \Delta x) + \Delta \cdot R_1,$$

$$\frac{\Delta S_2}{\Delta x} = \varphi'(x + 2\Delta x) + \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} \varphi''(x + 2\Delta x + \varepsilon_2 \Delta x) = \varphi'(x + 2\Delta x) + \Delta x \cdot R_2.$$

etc. etc. etc.

$$\frac{\Delta S_{n-1}}{\Delta x} = \varphi'(x + \overline{n-1}\,\Delta x) + \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} \cdot \varphi''(x + \overline{n-1}\,\Delta x + \varepsilon_{n-1} \Delta x) = \varphi'(x + \overline{n-1}\,\Delta x) + \Delta x \cdot R_{n-1}.$$

Soit $$T = R + R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1},$$

on trouve, en ajoutant,

$$(a) \quad \frac{\varsigma_n - \varsigma}{\Delta x} = \varphi' x + \varphi'(x + \Delta x) + \varphi'(x + 2\Delta x) + \ldots + \varphi'(x + \overline{n-1}\,\Delta x) + \Delta x \cdot T.$$

Mais en désignant par x, et x_n les abscisses des points N et N_n, on a $\Delta x = \frac{x_n - x}{n}$, et $n \Delta x = x_n - x = h$.

Si dans $n \Delta x = h$, nous changeons n en $\frac{h}{0}$, et Δx en 0, on aura toujours $\frac{h}{0} \times 0 = h$. Mais $\Delta x = 0$, peut s'écrire $\Delta x = dx$; on a donc $ndx = h$, quand n a la valeur ci-dessus, et l'on pourra écrire :

$$\overline{n-1}\,dx = n\,dx - dx = h - dx = h.$$

Si donc nous posons dans l'équation (a), $n = \frac{h}{0}$, donc $\Delta x = dx$, elle devient :

$$\frac{\varsigma_n - \varsigma}{dx} = \varphi' x + \varphi'(x + dx) + \varphi'(x + 2dx) + \ldots + \varphi'(x + h) + dx \cdot T.$$

Mais le terme $dx \cdot T$ pouvant être supprimé, on a :

$$\varsigma_n - \varsigma = dx \left\{ \varphi' x + \varphi'(x + dx) + \varphi'(x + 2dx) + \ldots + \varphi'(x + h) \right\} = \int_x^{x+h} \varphi' x \, dx.$$

Mais on a $S = \varphi x$, donc $dS = \varphi' x\, dx$; donc

$$\varsigma_n - \varsigma = \int_x^{x+h} ds.$$

Or, on a évidemment $\int ds = s + c$, donc

$$\int_x^{x+h} ds = \Big[s + c \Big]_x^{x+h} = \Big[\varphi(x+h) - \varphi x \Big].$$

Soit $S_n = \varphi(x+h)$, $S_0 = \varphi x$, on a

$$\int_x^{x+h} ds = S_n - S_0.$$

Mais S_n étant l'arc indéfini de la développée correspondant au point N_n, et S_0 celui qui répond au point N, on a évidemment

$$\text{arc } N_n N = S_n - S_0 = S;$$

on a donc

$$\varsigma_n - \varsigma = S.$$

Corollaire. Soit un fil inextensible d'une longueur ς_n, fixé au point N_n de la développée, et roulé sur cette courbe. Soit M l'autre extrémité du même fil, si on le déroule de manière qu'il reste toujours tangent à la développée, le point mobile M décrira évidemment la développante.

2^me^ Problème. *Chercher l'équation différentielle de la* développante, *étant donnée l'équation de la développée.*

Soit $F(\alpha, \beta) = 0$ (1) l'équation de la développée, $y = fx$ celle de la développante dont on cherche l'équation différentielle; au point x, y de celle-ci répond le point α, β de la développée, et l'on a, entre ces points la relation

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}. \qquad (2)$$

L'équation de la normale au point $M(x, y)$ de la développante est

$$x - \alpha + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (3)$$

Donc, en éliminant α et β entre les trois équations (1), (2) et

et (3), on aura une équation entre $x, y, \frac{dy}{dx}$, telle que $\psi(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, qui sera l'équation différentielle de la Développante cherchée.

2. Coordonnées polaires.

Cherchons l'équation polaire de la développée. Soit $N(\alpha, \beta)$ les coordonnées polaires du cercle de courbure du point $M(r, \theta)$ de la développante donnée $r = f(\theta)$. Joignons les points N et M, cette droite sera tangente à la développée et normale à la développante. Menons une tangente à la développante au point M, et abaissons du pôle une perpendiculaire sur chacune de ces tangentes. Soit P le pied de la perpendiculaire à la tangente de la développée, Q celui de la perpendiculaire à la tangente de la développante, et nommons p et q les longueurs respectives de ces perpendiculaires, on aura

$$q = r \sin \mu = \varphi(r), \qquad (1$$

μ est, comme toujours, l'angle OMQ, que le rayon vecteur au point M fait avec la tangente en ce point.

Soit γ l'angle que la tangente au point N de la développée fait avec le rayon vecteur β de ce point, on aura pareillement

$$p = \beta \sin \gamma.$$

Mais on a $\gamma = 90 - [\alpha - \theta - \mu]$, donc p est une fonction de β et de α, que je représenterai par

$$p = \psi(\alpha, \beta).$$

Mais on a évidemment

$$p = \sqrt{r^2 - q^2}, \qquad (2$$

$$\beta = \sqrt{p^2 + (\varsigma - q)^2}, \qquad (3$$

ς désignant le rayon de coubure $MN = \dfrac{(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2})^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2(\frac{dr}{d\theta})^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$.

Donc, en éliminant r et q, entre les trois équations (1, (2, (3 on aura une relation entre p et β, et si pour p nous mettons sa valeur $\psi(\alpha, \beta)$, on aura une relation entre α et β, telle

$$F(\alpha, \beta) = 0,$$

qui sera l'équation cherchée.

Rem. On a $q = r \sin \mu$, et $\sin \mu = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}}$, donc

$$q = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}}.$$

Cette équation donne, par la différentiation,

$$\frac{dq}{dr} = \frac{r\left[r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{dr^2}{d\theta^2}\right]}{(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{r}{\varsigma};$$

on a donc

$$\varsigma = \frac{rdr}{dq},$$

et par conséquent l'équation (3 peut s'écrire de cette manière :

$$\beta = \sqrt{p^2 + (\frac{rdr}{dq} - q)^2}$$
$$= \sqrt{r^2 - q^2 + (\frac{rdr}{dq} - q)^2}$$
$$= \sqrt{r^2 - 2qr\frac{dr}{dq} + r^2\frac{dr^2}{dq^2}}.$$

Donc les équations entre lesquelles il faut éliminer r et q, sont les suivantes :

$$q = \varphi r,$$
$$p = \sqrt{r^2 - q^2},$$
$$\beta = \sqrt{r^2 - 2qr\frac{dr}{dq} + r^2\frac{dr^2}{dq^2}}.$$

L'équation résultante sera de la forme

$$\xi(p, \beta) = 0.$$

Donc, en éliminant p entre celle-ci, et $p = \psi(\alpha, \beta)$, on aura l'équation cherchée

$$F(\beta, \alpha) = 0.$$

Applications.

1^er^ *Exemple.* L'équation de la cycloïde ordinaire est

$$y = \mathrm{R} \cdot \text{arc sin vers} \cdot \frac{x}{\mathrm{R}} + \sqrt{2\mathrm{R}x - x^2},$$

R est le rayon du cercle générateur. On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2\mathrm{R} - x}{x}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mathrm{R}}{x\sqrt{2\mathrm{R}x - x^2}}.$$

Donc, les formules

$$\beta = y + \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \alpha = x - \frac{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

deviennent :

$$\alpha = 4\mathrm{R} - x, \quad \beta = \mathrm{R} \cdot \text{arc sin vers} \frac{x}{\mathrm{R}} - \sqrt{2rx - x^2}.$$

Donc, en éliminant x entre ces équations, on obtient :

$$\beta = \mathrm{R} \text{ arc sin vers} \frac{4\mathrm{R} - \alpha}{\mathrm{R}} - \sqrt{\left\{2\mathrm{R}(4\mathrm{R} - \alpha) - (4\mathrm{R} - \alpha)^2\right\}},$$

pour l'équation de la développée. Cette équation est celle d'une cycloïde égale à la proposée, comme on s'en assure facilement en transportant l'origine du sommet au point initial.

2^me^ *Exemp.* Soit $y^2 = px$ l'équation de la parabole, il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sqrt{p}}{4x\sqrt{x}};$$

on a par conséquent

$$\alpha = \sqrt{p} + 3x, \quad \beta = -\frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{p}}.$$

En éliminant x, on trouve

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - \frac{p}{2})^3.$$

3^me *Exemp.* L'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a donc

$$\alpha = \frac{a^2-b^2}{a^4}x^3, \quad \beta = -\frac{a^2-b^2}{b^4}\cdot y^3,$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^3, \quad = -\frac{(a^2-b^2)}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^3.$$

D'où : $(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right\} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$;

c'est l'équation de la développée de l'Ellipse.

En changeant b en $b\sqrt{-1}$, on aura celle de l'hyperbole, ou

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Si l'on fait $a = b$, dans la première de ces équations on trouve

$$\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = 0, \beta = 0;$$

donc la développée du cercle se réduit à un point qui est son centre.

Pour l'hyperbole équilatère, où $b = a$, la 2^de des équations ci-dessus conduit à

$$\alpha^{\frac{2}{3}} - \beta^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

4^me *Exemp.* Soit $r = a^\theta$ l'équation de la Spirale logarithmique, on trouve $q = \frac{r}{\sqrt{1+\log^2 a}}$. q étant la perpendiculaire abaissée du pôle sur la tangente en $M(r, \theta)$. Car on a (1) $q = r\sin\mu$,

$$\sin\mu = \frac{r}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}, \quad \frac{dr}{d\theta} = a^\theta \cdot \log a = r\log a.$$

Donc $p = \sqrt{r^2-q^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{1+\log^2 a}} = \frac{r\log a}{\sqrt{1+\log^2 a}}$. (2)

$$\frac{dr}{dq} = \sqrt{1+\log^2 a}.$$

On a de plus

$$\beta = \sqrt{\left\{ r^2 - 2qr\frac{dr}{dq} + r^2\frac{dr^2}{dq^2} \right\}} = r\log a\,;$$

d'où : $$\frac{p}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+\log^2 a}},$$

$$p = \frac{\beta}{\sqrt{1+\log^2 a}}\,;$$ donc enfin $\beta = a^{\alpha}$, α étant l'angle que le rayon vecteur β fait avec l'axe fixe du pôle. L'on voit que la développée de la Spirale logarithme, est aussi une Spirale logarithmique égale à la Spirale donnée.

§ 50.

Contacts des divers ordres, et osculation.

Définitions et notations. Nous représenterons par $y = fx$ une courbe donnée, et par $y = \varphi x$, une courbe inconnue, d'une espèce telle qu'elle exige, pour être connue, la détermination de n constantes, ou n points, par lesquelles elle est assujettie à passer. Prenons sur la 1re courbe n points $M, M_1, M_2, M_3, \ldots M_{n-1}$, ayant pour abscisses respectivement

$$x,\ x+\Delta x,\ x+2\Delta x,\ x+3\Delta x,\ \ldots\ x+\overline{n-1}\,\Delta x\,;$$

les ordonnées correspondantes seront

$$f(x),\ f(x+\Delta x),\ f(x+2\Delta x),\ f(x+3\Delta x),\ \ldots\ f(x+\overline{n-1}\,\Delta x).$$

Si la 2de courbe $y = \varphi x$, a avec la 1re les n points $M, M_1, M_2, M_3, \ldots M_{n-1}$ communs, les abscisses de ces points seront les mêmes que celles ci-dessus, et les ordonnées étant respectivement

$$\varphi x,\ \varphi(x+\Delta x),\ \varphi(x+2\Delta x),\ \varphi(x+3\Delta x),\ \ldots\ \varphi(x+\overline{n-1}\,\Delta x),$$

on aura évidemment les équations

$$\left.\begin{aligned} fx &= \varphi x\,,\\ f(x+\Delta x) &= \varphi(x+\Delta x)\,,\\ f(x+2\Delta x) &= \varphi(x+2\Delta x)\,,\\ f(x+3\Delta x) &= \varphi(x+3\Delta x)\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f(x+n-1\,\Delta x) &= \varphi(x+n-1\,\Delta x). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Si les points $M_1, M_2, \ldots M_{n-1}$ s'approchent de plus en plus du

point M, ce qui arrivera, quand Δx diminuera de plus en plus, la courbe $y=\varphi x$, assujettie à passer toujours par ces points, changera bien dans ses dimensions, mais elle restera toujours de la même espèce, attendu que la nature de cette courbe dépend de n points, ou de n constantes.

1° Supposons que les deux courbes aient deux points communs, savoir M et M_1.

Pour exprimer que le point M_1 vient à coïncider avec le point M, il faut poser $\Delta x=0$; dans ce cas la courbe $y=\varphi x$, déterminée par la condition unique qu'un de ses points M_1 coïncide avec le point M de la courbe $y=fx$, est dit avoir avec celle-ci un contact du 1er ordre.

Donc, les conditions analytiques du contact du 1er ordre sont :

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\varphi x, \\ f(x+\Delta x)=\varphi(x+\Delta x), \\ \Delta x=0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

2° Supposons que les deux courbes aient trois points communs, savoir M, M_1, M_2.

Pour exprimer que le point M_2 vient à coïncider avec le point M, il faut poser $2\Delta x=0$. Si alors la courbe $y=\varphi x$ est déterminée par la condition que seulement deux de ses points M_1 et M_2 coïncident avec le point M de la courbe $y=fx$, on dit qu'elle a un contact du 2^{d} ordre avec celle-ci.

D'où il suit, que les conditions analytiques du contact du 2^{d} ordre sont :

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\varphi(x), \\ f(x+\Delta x)=\varphi(x+\Delta x), \\ \Delta x=0, \\ f(x+2\Delta x)=\varphi(x+2\Delta x), \\ 2\Delta x=0. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Il suit de là, que les conditions d'un contact du 3^{me} ordre seront :

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\varphi(x), \\ f(x+\Delta x)=\varphi(x+\Delta x), \\ \Delta x=0, \\ f(x+2\Delta x)=\varphi(x+2\Delta x), \\ 2\Delta x=0, \\ f(x+3\Delta x)=\varphi(x+3\Delta x), \\ 3\Delta x=0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Comme la courbe $y = \varphi x$, exige n constantes pour être déterminée, et par conséquent n équations entre ces constantes, il est clair qu'aucun des systèmes d'équations (2), (3), (4),... ne saurait déterminer ces n constantes, quand le nombre des équations de chacun est inférieur à n. Mais l'on voit déjà que le second système déterminera plus de ces constantes que le 1er, le 3^{me} plus que le 2^{d}, et ainsi de suite. Donc, la courbe $y = \varphi x$, déterminée par le 2^{d} système, sera moins indéterminée que celle qui se rapporte au 1er système; celle déterminée par le 3^{me} système sera également moins indéterminée, que quand la courbe n'est déterminée que par les systèmes précédents, et ainsi de suite. La courbe $y = \varphi x$ sera par conséquent d'autant mieux déterminée qu'elle aura un contact plus élevé avec la courbe donnée $y = fx$.

3° Supposons enfin que les deux courbes aient n points communs, savoir $M, M_1, M_2, \ldots M_{n-2}, M_{n-1}$.

Pour exprimer que le point M_{n-1} de la courbe $y = \varphi x$ coïncide avec le point M de la courbe $y = fx$, il faut poser $\overline{n-1}\,\Delta x = 0$. Si la courbe inconnue est déterminée par la condition que les n points dont sa détermination dépend, savoir les points $M, M_1, M_2, \ldots M_{n-1}$ coïncident avec le point M de l'autre courbe, on dit qu'elle a avec celle-ci un contact du $n-1$ ordre. Donc les conditions analytiques de ce contact le plus élevé seront :

$$\left.\begin{array}{l} fx = \varphi x, \\ f(x+\Delta x) = \varphi(x+\Delta x), \\ \qquad \Delta x = 0, \\ fx+2\Delta x) = \varphi(x+2\Delta x), \\ \qquad 2\Delta x = 0, \\ f(x+3\Delta x) = \varphi(x+3\Delta x), \\ \qquad 3\Delta x = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x+\overline{n-1}\,\Delta x) = \varphi(\Delta+\overline{n-1}\,\Delta x), \\ \qquad \overline{n-1}\,\Delta x = 0. \end{array}\right\} (n)$$

Mais ce système contenant n équations entre les n constantes par lesquelles la courbe inconnue $y = \varphi x$ est déterminée, on pourra résoudre ces équations par rapport à ces constantes, et les substituer dans l'équation $y = \varphi x$, et l'on obtiendra une courbe $y = \varphi_{n-1} x$ de cette espèce, parfaitement connue, que l'on nomme la *courbe osculatrice* de l'espèce $y = \varphi x$, au point $M(x, y)$ de la

courbe donnée $y=fx$. La courbe osculatrice est donc une courbe de l'espèce $y=\varphi x$, qui a, avec la courbe donnée $y=fx$, au point $M(x,y)$, le contact le plus élevé ou de l'ordre $n-1$.

Si $y=\varphi_1 x$, $y=\varphi_2 x$, $y=\varphi_3 x$, ... $y=\varphi_{n-2}x$;

sont les courbes de contact du 1er, 2me, ... $n-2$ ordre, en tant qu'elles résultent des systèmes d'équations (2), (3), (4) ... $(n-1)$, toutes ces courbes renfermeront encore des constantes indéterminées, mais, en général, chacune en renfermera une de moins que celle qui la précède à gauche; la courbe osculatrice $y=\varphi_{n-1}x$, sera seule complètement déterminée.

Réduction des équations (2), (3), (4), etc., à leur plus simple expression.

1° Réduction des équations (2).

Pour le contact du 1er ordre, on a les équations

$$\left.\begin{array}{l} fx=\varphi x, \\ f(x+\Delta x)=\varphi(x+\Delta x), \\ \Delta x=0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

La 2de de ces équations donne, par la formule de Taylor

$$fx+f'x\Delta x+\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2}f''(x+\varepsilon\Delta x)=\varphi x+\varphi' x\cdot\Delta x+\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2}\varphi''(x+\eta\Delta x),\ 0<\eta<1,$$

$$0<\varepsilon<1.$$

En supprimant $fx=\varphi x$, puis en divisant par Δx, cette équation devient :

$$f'x+\frac{\Delta x}{1\cdot 2}f''(x+\varepsilon\Delta x)=\varphi' x+\frac{\Delta x}{1\cdot 2}\varphi''(x+\eta\Delta x).$$

Mais puisqu'on a $\Delta x=0$, il vient

$$f'x=\varphi' x.$$

Les conditions (2) se réduisent par conséquent aux suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} fx=\varphi x, \\ f'x=\varphi' x. \end{array}\right\} \quad (2')$$

2° Réduction des équations (3).

Les conditions primitives du contact du 2d ordre sont :

$$\left.\begin{aligned} fx &= \varphi x, \\ f(x+\Delta x) &= \varphi(x+\Delta x), \\ \Delta x &= 0, \\ f(x+2\Delta x) &= \varphi(x+2\Delta x), \\ 2\Delta x &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

qui, à cause de la réduction 1°, peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\begin{aligned} fx &= \varphi x, \\ f'x &= \varphi' x, \\ f(x+2\Delta x) &= \varphi(x+2\Delta x), \\ 2\Delta x &= 0. \end{aligned}$$

Développons les deux membres de la 3me équation, nous aurons :

$$fx + f'x \cdot 2\Delta x + f''x \cdot \frac{(2\Delta x)^2}{1\cdot 2} + \frac{(2\Delta x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x + 2\varepsilon_1 \Delta x) =$$

$$\varphi x + \varphi' x \cdot 2\Delta x + \varphi'' x \cdot \frac{(2\Delta x)^2}{1\cdot 2} + \frac{(2\Delta x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} \varphi'''(x + 2\eta_1 \Delta x).$$

Mais à cause de $fx = \varphi x$, $f'x = \varphi' x$, cette équation, après l'avoir divisée par $\frac{(2\Delta x)^2}{1\cdot 2}$ se réduit à

$$f''x + \frac{2\Delta x}{3} f'''(x + 2\varepsilon_1 \Delta x) = \varphi'' x + \frac{2\Delta x}{3} \varphi'''(x + 2\eta_1 \Delta x).$$

Mais à cause de $2\Delta x = 0$, celle-ci devient

$$f''x = \varphi'' x.$$

Les conditions analytiques pour le contact du 2d ordre sont par conséquent

$$\left.\begin{aligned} fx &= \varphi x, \\ f'x &= \varphi' x, \\ f''x &= \varphi'' x. \end{aligned}\right\} \quad (3')$$

3° Réduction des équations (4).

Pour les conditions du contact du 3^me^ ordre, nous avons trouvé

$$\left.\begin{aligned} fx &= \varphi x, \\ f(x+\Delta x) &= \varphi x + \varphi(x+\Delta x), \\ \Delta x &= 0, \\ f(x+2\Delta x) &= \varphi(x+2\Delta x), \\ 2\Delta x &= 0, \\ f(x+3\Delta x) &= \varphi(x+3\Delta x), \\ 3\Delta x &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ces équations, à cause des formules (3'), se réduisent à

$$\begin{aligned} fx &= \varphi x, \\ f'x &= \varphi' x, \\ f''x &= \varphi'' x, \\ f(x+3\Delta x) &= \varphi(x+3\Delta x), \\ 3\Delta x &= 0. \end{aligned}$$

Mais on a, à la place de la 4^me^ des équations précédentes, la suivante :

$$fx + f'x\cdot 3\Delta x + f''x\cdot\frac{(3\Delta x)^2}{1\cdot 2} + f'''x\cdot\frac{(3\Delta x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(3\Delta x)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f^{IV}(x+3\varepsilon_2\Delta x) =$$

$$\varphi x + \varphi' x\cdot 3\Delta x + \varphi'' x\cdot\frac{(3\Delta x)^2}{1\cdot 2} + \varphi''' x\cdot\frac{(3\Delta x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(3\Delta x)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\varphi^{IV}(x+3\eta_2\Delta x).$$

Or, à cause de $fx = \varphi x$, $f'x = \varphi' x$, $f''x = \varphi'' x$, cette équation se réduit à

$$f'''x\cdot\frac{(3\Delta x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(3\Delta x)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f^{IV}(x+3\varepsilon_2\Delta x) =$$

$$\varphi'''x\cdot\frac{(3\Delta x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(3\Delta x)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\varphi^{IV}(x+3\eta_2\Delta x).$$

Divisons par $\frac{(3\Delta x)^3}{1\cdot 2\cdot 3}$, puis posons $3\Delta x = 0$, nous aurons

$$f''' = \varphi'''x.$$

Donc les conditions du contact du 3^me^ ordre sont :

$$\left.\begin{aligned} fx &= \varphi x, \\ f'x &= \varphi' x, \\ f''x &= \varphi'' x, \\ f'''x &= \varphi''' x. \end{aligned}\right\} \quad (4')$$

Donc, en généralisant, on trouve, pour les conditions du contact de l'ordre $n-1$, les n équations :

$$\left.\begin{aligned} fx &= \varphi x, \\ f'x &= \varphi' x, \\ f''x &= \varphi'' x, \\ &\cdots\cdots \\ f^{(n-1)}x &= \varphi^{(n-1)}x. \end{aligned}\right\} \quad (n')$$

Ce sont les équations définitives qui serviront à déterminer les n constantes de l'équation $y = \varphi x$, et par conséquent à construire l'équation $y = \varphi_{n-1}x$ de la courbe osculatrice de l'espèce $y = \varphi x$.

Corollaire. Si $n = 2$, ou si la courbe $y = \varphi x$ est une droite, la courbe osculatrice $y = \varphi_1 x$, sera la tangente au point $M(x,y)$ de la courbe $y = fx$.

Si $n = 3$, ou si la courbe $y = \varphi x$ est un cercle, la courbe osculatrice, déterminée par les trois équations

$$\begin{aligned} fx &= \varphi x, \\ f'x &= \varphi' x, \\ f''x &= \varphi'' x, \end{aligned}$$

sera le cercle osculateur de la courbe $y = fx$, au point $M(x,y)$. Le cercle osculateur est le même que le cercle de courbure.

Pour démontrer ces deux propositions, soit

1° $\varphi x = ax + b$ ou $y = ax + b$.

Déterminons a et b par la condition que le contact soit le plus élevé, ou du 1^er^ ordre. On a $\varphi' x = a$. On a donc les équations

$$\begin{aligned} fx &= ax + b, \\ f'x &= a. \end{aligned}$$

Soit $M(x', y')$ le point de la courbe $y = fx$ que l'on considère on aura

$$\begin{aligned} y' &= ax' + b, \\ f'x' &= a; \end{aligned}$$

d'où : $b = y' - f'x' \cdot x'$.

donc $y = ax + b$ devient $y - y' = fx'(x - x')$,
ce qui est l'équation de la tangente.

Soit 2°, $(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2$, l'équation d'un cercle renfermant les constantes inconnues α, β, r, qu'il faut déterminer par la condition que le cercle soit osculateur au point $M(x', y')$ de la courbe donnée $y = fx$.

Si nous différentions deux fois on a les trois équations

$$(y'-\beta)^2 + (x'-\alpha)^2 = r^2,$$

$$(y'-\beta)\frac{dy'}{dx'} + (x'-\alpha) = 0,$$

$$(y'-\beta)\frac{d^2y'}{dx'^2} + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + 1 = 0,$$

dans lesquelles il faut faire

$$y' = fx',$$

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dfx'}{dx'},$$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2fx'}{dx'^2},$$

on en tire, par l'élimination

$$\alpha = x' - \frac{1 + \left(\frac{dfx'}{dx'}\right)^2}{\frac{d^2fx'}{dx'^2}} \cdot \frac{dfx'}{dx'},$$

$$\beta = fx' + \frac{1 + \left(\frac{dfx'}{dx'}\right)^2}{\frac{d^2fx'}{dx'^2}},$$

$$r = \frac{\left(1 + \frac{dfx'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2fx'}{dx'^2}}.$$

Comme autre application de cette théorie, cherchons les équations des paraboles des divers ordres, osculatrices au point $M(x, y)$ d'une courbe donnée $y = fx$.

Soit l'équation

$$y_n = A + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + A_3 x_1^3 + \ldots + A_n x_1^n,$$

qui est celle d'une parabole de l'ordre n, on aura, pour $n=1, 2, 3$, etc., respectivement les équations

$$y_1 = A + A_1 x_1, \quad (1)$$
$$y_2 = A + A_1 x_1 + A_2 x_1^2, \quad (2)$$
$$y_3 = A + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + A_3 x_1^3, \quad (3)$$
$$\text{etc.},$$

qui sont celles de paraboles du 1^er^, 2^me^, 3^me^, etc. ordre, et l'on voit, en même temps, que la parabole du 1^er^ ordre est une ligne droite.

Parabole Osculatrice du 1^er^ ordre.

Comme la droite (1) passe par le point $M(x, y)$ de la courbe, son équation sera

$$y_1 - y = A_1 (x_1 - x)$$
$$= \frac{dy_1}{dx_1}(x_1 - x).$$

Comme le contact est du 1^er^ ordre, on a $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$, donc l'équation de la parabole osculatrice du 1^er^ ordre, est

$$y_1 - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x),$$

c'est l'équation de la tangente au point $M(x, y)$ de la courbe $y = fx$.

Parabole Osculatrice du 2^d^ ordre.

Différentions deux fois l'équation

$$y_2 = A + A_1 x_1 + A_2 x^2{}_1, \quad (2)$$

on aura

$$\frac{dy_2}{dx_1} = A_1 + 2A_2 x_1,$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2{}_1} = 2A_2.$$

Pour le contact du 2^d^ ordre on a

$$y = y_2, \quad x = x_1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y_1}{dx^2{}_1}.$$

Donc les équations précédentes deviennent :

$$y = A + A_1 x + A_2 x^2 ,$$

$$\frac{dy}{dx} = A_1 + 2A_2 x ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A_2 ;$$

d'où : $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$, $A_1 = \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} \cdot x$,

$$A = y - \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} x \right) x - \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} x^2 .$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (2), on obtient :

$$y_2 - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}(x_1 - x)^2 ,$$

ce qui est l'équation de la parabole osculatrice du 2^d ordre.

Cherchons encore l'équation de la *parabole osculatrice du* 3^{me} *ordre.*

Soit $y_3 = A + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + A_3 x_1^3$, (3), cette équation, on déterminera les constantes A, A_1, A_2, A_3, en différentiant trois fois, puis en posant $y_3 = y$, $x_1 = x$, $\frac{dy_3}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y_3}{d^2x_1} = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y_3}{d^3x_1} = \frac{d^3y}{dx^3}$; ce qui fournira les quatre équations

$$y = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 ,$$

$$\frac{dy}{dx} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 \cdot 2A_2 + 2 \cdot 3A_3 x ,$$

$$\frac{d^3y}{dx} = 1 \cdot 2 \cdot 3A_3 .$$

On en tire :

$$A_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{d^3y}{dx^3}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} \cdot x ,$$

$$A_1 = \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} \cdot x^2 ,$$

$$A = y - \frac{dy}{dx} \cdot x + \tfrac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \cdot x^2 - \tfrac{1}{6} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} \cdot x^3.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (3), on a :

$$y^2 - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x) + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}(x_1 - x)^2 + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3}(x_1 - x)^3,$$

c'est l'équation cherchée.

L'on voit, par ces résultats, que l'équation de la parabole osculatrice du n^e ordre sera :

$$y_n - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x) + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}(x_1 - x)^2 + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot \frac{d^ny}{dx^n}(x_1 - x)^n.$$

Remarque. Il devient maintenant facile de construire autant de termes que l'on veut des formules de Taylor et de Maclaurin.

Construction de la Formule de Maclaurin.

Soient $MP = y$, $OP = x$, les coordonnées du point M de la courbe $y = fx$, O étant l'origine des coordonnées. Si nous prenons, à partir du point P sur l'axe des x une distance $PH = x_1 - x$, prise sur le prolongement de l'abscisse $OP = x$, l'ordonnée de la courbe correspondante à l'abscisse $x + x_1 - x = x_1$, sera $f(x_1)$, soit HM′ cette ordonnée, on aura par le Théorème général de Maclaurin :

$$f(x_1) - f(x) = \frac{dy}{dx}(x_1 - x) + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{(x_1 - x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{(x_1 - x)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Par le point M menons une parallèle à l'axe des x, et soit m le point où elle rencontre l'ordonnée $HM' = f(x_1)$, on aura

$$mM' = f(x_1) - f(x).$$

Menons maintenant au point M de la courbe les paraboles osculatrices du 1er, 2me, 3me, etc. ordre, savoir :

$$y_1 - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x),$$

$$y_2 - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x) + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2}(x_1 - x)^2,$$

$$y_3 - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x) + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2}(x_1 - x)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3}(x_1 - x)^3, \text{ etc.}$$

Soient p_1, p_2, p_3, etc., les points où elles coupent respectivement l'ordonnée HM′, il est clair que l'on aura :

$$mp_1 = y_1 - y,$$
$$mp_2 = y_2 - y,$$
$$mp_3 = y_3 - y, \text{ etc.}$$

donc
$$mp_2 - mp_1 = p_1p_2 = \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2}(x_1 - x)^2,$$

$$mp_3 - mp_2 = p_2p_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3}(x_1 - x)^3, \text{ etc.}$$

On a donc enfin :

$$mM' = f(x_1) - fx = mp_1 + p_1p_2 + p_2p_3 + \text{etc.},$$

pour la construction demandée.

Construction de la Formule de Taylor.

Si nous posons $PH = x_1 - x = h$, $x_1 = x + h$, on aura la Formule de Taylor, savoir :

$$f(x+h) - fx = \frac{dy}{dx}\cdot h + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.},$$

donc
$$mM' = mp_1 + p_1p_2 + p_2p_3 + \text{etc.};$$

c'est la construction cherchée.

PROPRIÉTÉS DES LIGNES DE CONTACT.

1° *La différence des ordonnées* $f(x+\Delta x)-\varphi(x+\Delta x)$ *de deux courbes* $y=fx$, $Y=\varphi x$, *qui se touchent, est, dans le voisinage du point de contact* $M(x,y)$, *d'autant plus petite, que le contact est d'un ordre plus élevé.*

Démonstration. On a :

$$f(x+\Delta x)-\varphi(x+\Delta x)=fx-\varphi x+(f'x-\varphi'x)\frac{\Delta x}{1}+$$

$$(f''x-\varphi''x)\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2}+\ldots+(f^{(n-2)}x-\varphi^{(n-2)}x)\frac{\Delta x^{n-2}}{1\cdot 2\ldots n-1}+$$

$$(f^{(n-1)}x-\varphi^{(n-1)}x)\frac{\Delta x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1}+(f^{(n)}x-\varphi^{(n)}x)\frac{\Delta x^n}{1\cdot 2\ldots n}+\text{etc.}\quad (a)$$

Si $\varphi x=\varphi_{n-2}x$, le contact est de l'ordre $n-2$, et l'on aura :

$$fx=\varphi x,\ f'x=\varphi'x,\ f''x=\varphi''x,\ \text{etc.}\ f^{(n-2)}x=\varphi^{(n-2)}x;$$

donc l'équation (a) deviendra :

$$f(x+\Delta x)-\varphi_{n-2}(x+\Delta x)=f^{(n-1)}x-\varphi^{(n-1)}x)\cdot\frac{\Delta x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1}+$$

$$(f^{(n)}x-\varphi^{(n)}x)\cdot\frac{\Delta x^n}{1\cdot 2\ldots n}+\text{etc.},\quad (b)$$

de plus, on pourra concevoir Δx assez petit pour que le 1er terme du 2d membre de cette équation soit plus grand que la somme de tous les autres.

Si l'on pose, en second lieu, $\varphi x=\varphi_{n-1}x$, le contact sera de l'ordre $n-1$, et l'on aura :

$$fx=\varphi x,\ f'x=\varphi'x,\ f''x=\varphi''x,\ \text{etc.}\quad f^{(n-1)}x=\varphi^{(n-1)}x;$$

donc l'équation (a) deviendra :

$$f(x+\Delta x)-\varphi_{n-1}(x+\Delta x)=(f^{(n)}x-\varphi^{(n)}x)\cdot\frac{\Delta x^n}{1\cdot 2\ldots n}+\text{etc.}\quad (c)$$

Or, dans l'hypothèse de Δx suffisamment petit, on a :

$$(f^{(n-1)}x-\varphi^{(n-1)}x)\cdot\frac{\Delta x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1}>(f^{(n)}x-\varphi^{(n)})\cdot\frac{\Delta x^n}{1\cdot 2\ldots n}+\text{etc.},$$

on a donc, pour cette valeur de Δx :

$$f(x+\Delta x)-\varphi_{n-1}(x+\Delta x) < f(x+\Delta x)-\varphi_{n-2}(x+\Delta x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Donc si $\varphi_{n-1}x$ représente la courbe osculatrice, celle-ci aura avec la courbe fx, au point M, le contact le plus intime.

2° *Si la courbe* φx *a avec la courbe* fx, *au point* $M(x,y)$, *un contact de l'ordre pair* 2γ, φx *coupera* fx *au point* M, *et si le contact est de l'ordre impair* $2\gamma+1$, *la courbe* φx *se trouvera du même côté que la courbe* fx, *et ne la coupera pas au point* M.

Démonstration. Si le contact est de l'ordre 2γ, on a :

$$fx=\varphi x,\quad f'x=\varphi' x,\quad \ldots\quad f^{(2\gamma)}x=\varphi^{(2\gamma)}x;$$

donc

$$f(x+\Delta x)-\varphi_{2\gamma}(x+\Delta x)=\frac{\Delta x^{2\gamma+1}}{1\cdot 2\ldots 2\gamma+1}\cdot\left\{f^{(2\gamma+1)}x-\varphi^{(2\gamma+1)}x\right\}$$
$$+\text{ etc.},\quad (1$$

$$f(x-\Delta x)-\varphi_{2\gamma}(x-\Delta x)=-\frac{\Delta x^{2\gamma+1}}{1\cdot 2\ldots 2\gamma+1}\cdot\left\{f^{(2\gamma+1)}x-\varphi^{(2\gamma+1)}x\right\}$$
$$+\text{ etc.}\quad (2$$

Or, Δx peut être pris assez petit pour que les signes des premiers Termes des seconds membres de ces deux équations soient ceux de ces membres eux-mêmes; donc la différence des ordonnées $f(x+\Delta x)-\varphi_{2\gamma}(x+\Delta x)$ qui suivent le point M est de signe contraire avec la différence $f(x-\Delta x)-\varphi_{2\gamma}(x-\Delta x)$ des ordonnées qui précèdent le point M, donc la courbe $\varphi_{2\gamma}x$ coupe la courbe fx au point M.

En second lieu, si le contact est de l'ordre $2\gamma+1$, on a :

$$f(x+\Delta x)-\varphi_{2\gamma+1}(x+\Delta x)=\frac{\Delta x^{2\gamma+2}}{1\cdot 2\ldots 2\gamma+2}\cdot\left\{f^{(2\gamma+2)}x-\varphi^{(2\gamma+2)}x\right\}$$
$$+\text{ etc.},\quad (1'$$

$$f(x-\Delta x)-\varphi_{2\gamma+1}(x-\Delta x)=\frac{\Delta x^{2\gamma+2}}{1\cdot 2\ldots 2\gamma+2}\cdot\left\{f^{(2\gamma+2)}x-\varphi^{(2\gamma+2)}x\right\}$$
$$-\text{ etc.}\quad (2'$$

Donc en prenant Δx suffisamment petit, les deux différences

$$f(x+\Delta x)-\varphi_{2i+1}(x+\Delta x),\quad f(x-\Delta x)-\varphi_{2i+1}(x-\Delta x)$$

auront le même signe, et par conséquent la courbe φ_{2i+1} se trouvera, dans le voisinage du point M, du même côté de la courbe fx.

CHAPITRE II.

COURBES DE L'ESPACE.

---

§ 31.

Dérivée et Différentielle de l'arc.

Une droite de l'Espace est l'intersection de deux Surfaces; soient $f(x,y,z)=0$, $F(x,y,z)=0$ les équations de deux surfaces quelconques, il est clair que le système des deux équations simultanées

$$f(x,y,z)=0,\quad F(x,y,z)=0, \qquad (1)$$

représentera leur courbe d'intersection, et par conséquent une courbe quelconque de l'espace.

Mais en projetant cette courbe sur le plan des $z\,x$, l'équation de cette projection sera une équation de la forme

$$z=\varphi x;$$

et en projetant la même courbe sur le plan des $y\,x$, cette projection aura pour équation une relation de la forme

$$y=\psi(x).$$

D'où il suit que le système des deux équations

$$z=\varphi x,\quad y=\psi x, \qquad (2)$$

qui sont en même temps les équations des deux cylindres projetants, représentera aussi une courbe de l'espace. Les équations (2) s'obtiennent aussi, en éliminant des équations (1) successivement y et z.

L'arc indéfini s de la courbe peut être considéré comme une fonction de x, telle que

$$s = \xi(x).$$

On a donc, par le Théorème de Taylor :

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} + \frac{\Delta x}{1 \cdot 2}\,\xi''(x + \varepsilon \Delta x).$$

Mais on a aussi par le même Théorème :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} \cdot \psi''(x + \varepsilon_1 \Delta x),$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx} + \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} \cdot \varphi''(x + \varepsilon_2 \Delta x).$$

Soit Δc la corde de l'arc Δs, on a

$$\Delta c = \sqrt{\left\{ \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \right\}},$$

et

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2 \right\}}$$

$$= \sqrt{\left\{ 1 + \left[\frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x}{2} \cdot \psi''(x + \varepsilon_1 \Delta x) \right]^2 + \left[\frac{dz}{dx} + \frac{\Delta x}{2} \cdot \varphi''(x + \varepsilon_2 \Delta x) \right]^2 \right\}}.$$

Mais on a $\Delta s > \Delta c$, donc $\frac{\Delta s}{\Delta x} > \frac{\Delta c}{\Delta x}$; on peut donc poser :

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta c}{\Delta x} + \Delta x \cdot \mathrm{P},$$

car les deux rapports deviennent égaux pour $\Delta x = 0$. En mettant dans cette équation pour $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, $\frac{\Delta c}{\Delta x}$, leurs valeurs ci-dessus, on obtient l'égalité :

$$\frac{ds}{dx}+\Delta x\cdot\xi''(x+\varepsilon\Delta x)=\sqrt{\left\{1+\left[\frac{dy}{dx}+\frac{\Delta x}{2}\cdot\psi''(x+\varepsilon_1\Delta x)\right]^2+\left[\frac{dz}{dx}+\frac{\Delta x}{2}\cdot\varphi''(x+\varepsilon_2\Delta x)\right]\right\}}+\Delta x\cdot P.$$

Faisons $\Delta x=0$, il vient :

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}};$$

c'est la dérivée cherchée. On en déduit :

$$ds=dx\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}},$$

$$=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

§ 32.

Expressions des cosinus des angles que la tangente a la courbe fait avec les trois axes.

Soit α l'angle que la tangente au point $M(x',y')$ de la courbe fait avec l'axe des x; α sera une fonction de x telle que

$$\alpha=\chi(x).$$

Si par le point M nous menons une sécante, elle rencontrera la courbe en un point $M'(x'+\Delta x', y'+\Delta y')$. Nommons α' l'angle que la sécante forme avec l'axe des x, on aura

$$\alpha'=\alpha\pm\Delta\alpha,$$

$\Delta\alpha$ étant l'accroissement de α correspondant à l'accroissement $\Delta x'$ de x'. On a par conséquent

$$\cos\alpha'=\cos(\alpha\pm\Delta\alpha)=\cos\alpha\pm\Delta x\,\chi'(x+\varepsilon\Delta x)$$
$$=\cos\alpha+\Delta x\cdot P. \qquad (1)$$

Nommons Δc la corde MM' et Δs l'arc MM', on aura évidemment

$$\cos\alpha'=\frac{\Delta x}{\Delta c}.$$

Mais on a $\Delta c < \Delta s$, donc $\frac{\Delta x}{\Delta c} > \frac{\Delta x}{\Delta s}$; on peut donc poser

$$\cos\alpha' = \frac{\Delta x}{\Delta c} = \frac{\Delta x}{\Delta s} + \Delta x \cdot P_1,$$

$$= \frac{1}{\frac{\Delta s}{\Delta x}} + \Delta x \cdot P_1,$$

$$= \frac{1}{\frac{ds}{dx} + R \cdot \Delta x} + \Delta x \cdot P_1,$$

ou $$\cos\alpha + \Delta x \cdot P = \frac{1}{\frac{ds}{dx} + R \cdot \Delta x} + \Delta x \cdot P_1.$$

Faisons $\Delta x = 0$, on trouve enfin :

$$\cos\alpha = \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{dx}{ds}.$$

Soient β et γ les angles que la même tangente fait avec les axes des y et z, on aura évidemment

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

En ajoutant les carrés de ces trois cosinus, on trouve

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} = 1.$$

§ 53.

Équations de la tangente au point M'(x', y', z') de la courbe.

Soit δ la distance entre le point $M'(x', y', z')$ et le point quelconque $M(x, y, z)$ de la tangente, on aura les relations

$$x - x' = \delta\cos\alpha, \quad y - y' = \delta\cos\beta, \quad z - z' = \delta\cos\gamma.$$

De ces trois équations on déduit par la division

$$y - y' = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x - x'), \quad z - z' = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x - x').$$

Mais on a :

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\frac{dy'}{ds}}{\frac{dx'}{ds}} = \frac{dy'}{dx'},$$

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{\frac{dz'}{ds}}{\frac{dx'}{ds}} = \frac{dz'}{dx'};$$

donc les équations de la tangente demandée sont :

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'), \quad z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x').$$

Ces équations font voir que les projections de la tangente, sont tangentes aux projections de la courbe.

§ 54.

Angle de contingence.

Si nous menons des tangentes à deux points $M(x,y,z)$ $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ d'une courbe, l'angle $\Delta\omega$ compris par ces tangentes, pourra être considéré comme une fonction de x, et alors la valeur du rapport $\frac{\Delta\omega}{\Delta x}$, correspondante à $\Delta x = dx = 0$, sera la dérivée de l'angle de contingence.

Soit $\frac{d\omega}{dx} = \psi x$, cette dérivée, l'*angle de contingence* sera $d\omega = \psi x \cdot dx$.

Analyse.

Soient α, β, γ les angles que la tangente en M, et α', β', γ' les angles que la tangente en M' forment respectivement avec les axes des x, y, z, soient de plus

$$a = \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad b = \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad c = \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

$$a' = \cos\alpha' \qquad b' = \cos\beta' \qquad c' = \cos\gamma'.$$

Cela posé, on aura

$$\cos\Delta\omega = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Mais α, β, γ étant des fonctions de x, il est clair que quand x devient $x+\Delta x$, c'est-à-dire quand la tangente en M devient la tangente en M', les angles α, β, γ deviennent $\alpha+\Delta\alpha$, $\beta+\Delta\beta$, $\gamma+\Delta\gamma$; on a donc

$$\alpha' = \alpha+\Delta\alpha,\quad \beta' = \beta+\Delta\beta,\quad \gamma' = \gamma+\Delta\gamma,$$

et par conséquent

$$\cos\alpha' = \cos(\alpha+\Delta\alpha) = \cos\alpha + \Delta\cos\alpha = a + \Delta a = a',$$
$$\cos\beta' = \cos(\beta+\Delta\beta) = \cos\beta + \Delta\cos\beta = b + \Delta b = b',$$
$$\cos\gamma' = \cos(\gamma+\Delta\gamma) = \cos\gamma + \Delta\cos\gamma = c + \Delta c = c'.$$

Mais on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$

d'où

$$(a^2+b^2+c^2) - (a'^2+b'^2+c'^2) = 0, \quad \text{ou}$$
$$a\Delta a + b\Delta b + c\Delta c = -\tfrac{1}{2}[(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2].$$

On a donc aussi :

$$\cos\Delta\omega = a(a+\Delta a) + b(b+\Delta b) + c(c+\Delta c)$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + a\Delta a + b\Delta b + c\Delta c$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2}[(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2].$$

Mais à cause de $\cos\Delta\omega = 1 - \dfrac{(\Delta\omega)^2}{1\cdot 2} + \dfrac{(\Delta\omega)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ — etc.,

$$= 1 - \frac{(\Delta\omega)^2}{2} + (\Delta\omega)^4\cdot P,$$

on peut écrire

$$1 - \frac{(\Delta\omega)^2}{2} + (\Delta\omega)^4\cdot P = 1 - \tfrac{1}{2}[\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2],$$

d'où l'on tire

$$(\Delta\omega)^2 - (\Delta\omega)^4 P = [(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2],$$

et aussi

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta x}\right)^2[1 - \Delta\omega^2\cdot P] = \left(\frac{\Delta a}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\Delta x}\right)^2.$$

Mais quand $\Delta x = 0 = dx$, les rapports $\dfrac{\Delta a}{\Delta x}$, $\dfrac{\Delta b}{\Delta x}$, $\dfrac{c\Delta}{\Delta x}$, se

changent respectivement en $\frac{da}{dx}$, $\frac{db}{dx}$, $\frac{dc}{dx}$; de plus $\Delta\omega$ devient $d\omega$, et le rapport $\frac{\Delta\omega}{\Delta x}$ devient $\frac{d\omega}{dx}$; de sorte que l'équation précédente se changera en celle-ci :

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2[1-d\omega^2\cdot P'] = \left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\left(\frac{dc}{dx}\right)^2$$

ou $$\frac{d\omega}{dx} = \sqrt{\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\left(\frac{dc}{dx}\right)^2}; \qquad (1$$

d'où : $$d\omega = dx\sqrt{\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\left(\frac{dc}{dx}\right)^2}. \qquad (2$$

Mais en différentiant les équations

$$a = \frac{dx}{ds},\ b = \frac{dy}{ds},\ c = \frac{dz}{ds},$$

sans considérer aucune des lettres x, y, z, s comme variables indépendantes, on aura les expressions

$$\frac{da}{dx} = \frac{d^2x\cdot\frac{ds}{dx}-d^2s}{ds^2},\quad \frac{db}{dx} = \frac{d^2y\,\frac{ds}{dx}-d^2s\,\frac{dy}{dx}}{ds^2},$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{d^2z\,\frac{ds}{dx}-d^2s\,\frac{dz}{dx}}{ds^2},$$

on a donc

$$d\omega = dx\sqrt{\left\{\left(\frac{d^2x\cdot\frac{ds}{dx}-d^2s}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y\,\frac{ds}{dx}-d^2s\,\frac{dy}{dx}}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z\,\frac{ds}{dx}-d^2s\,\frac{dz}{dx}}{ds^2}\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{1}{ds^2}\sqrt{\left\{(d^2x\,ds-d^2s\,dx)^2+(dy^2ds-d^2s\,dy)^2+(d^2z\,ds-d^2s\,dz)^2\right\}}.$$

Si nous développons les carrés, et en faisant attention que l'équation

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2,$$

donne, par la différentiation

$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z,$$

on trouve :

$$d\omega = \frac{1}{ds}\sqrt{\left\{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2\right\}}, \qquad (a)$$

$$= \frac{1}{ds^2}\sqrt{\left\{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + d^2z)^2][dx^2 + dy^2 + dz^2] - [dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z]^2\right\}},$$

$$= \frac{1}{ds^2}\sqrt{\left\{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2\right\}}.$$

Cette expression définitive de l'angle de contingence, est tout-à-fait générale, c'est-à-dire, elle a lieu sans acception de variable indépendante. Elle se simplifiera quand on prend x pour variable indépendante, ce qui a lieu lorsque la courbe est donnée par deux équations de la forme

$$y = \psi(x), \quad z = \varphi x.$$

En effet comme la dérivée de x est alors $\frac{dx}{dx} = 1$, on aura $\frac{d\left(\frac{dx}{dx}\right)}{dx} = 0$, d'où $d^2x = 0$. Donc l'expression ci-dessus, quand x est la variable indépendante, se change en celle-ci :

$$d\omega = \frac{1}{ds^2}\sqrt{\left\{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dx\,d^2z) + (dx\,d^2y)^2\right\}}.$$

§ 55.

Rayon et Cercle de courbure.

Soit ε l'angle des normales aux tangentes en M et M' du § précédent, on aura

$$\varepsilon = \underline{\Lambda}\omega,$$

car les deux angles ε, $\underline{\Lambda}\omega$ ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun.

Soit O le point de rencontre des deux normales, décrivons de ce

point, avec la longueur $R = OM$, un arc de cercle compris entre les deux normales, et soit $\Delta s'$ la longueur de cet arc, on aura la proportion :

$$1 : \varepsilon :: R : \Delta s', \quad \text{ou}$$
$$1 : \Delta\omega :: R : \Delta s'; \quad \text{d'où}$$

$$R = \frac{\Delta s'}{\Delta\omega} = \frac{\frac{\Delta s'}{\Delta x}}{\frac{\Delta\omega}{\Delta x}}.$$

On nomme rayon de courbure au point $M(x, y, z)$, la valeur du rapport $\frac{\Delta s'}{\Delta\omega}$, quand $\Delta x = 0$, ou quand le point M' vient à coïncider avec le point M.

Pour trouver cette valeur, que je nommerai ς, observons d'abord que ς est une fonction de x, telle qu'en y changeant x en $x + \Delta x$, ς devient $\varsigma + \Delta\varsigma$ ou R. De plus, il est évident que l'on aura $\Delta\varsigma = 0$ pour $\Delta x = 0$. Mais si nous nommons Δs l'arc MM' de la courbe, les deux arcs Δs et $\Delta s'$ seront en général inégaux, et par suite aussi les rapports $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, $\frac{\Delta s'}{\Delta x}$; on peut donc écrire

$$\frac{\Delta s'}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta x} \pm \Delta x \cdot P,$$

attendu que ces rapports deviennent égaux, quand on pose $\Delta x = 0$. On peut donc écrire l'égalité ci-dessus de cette manière

$$\varsigma + \Delta\varsigma = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x} \pm \Delta x \cdot P}{\frac{\Delta\omega}{\Delta x}}.$$

Faisons maintenant $\Delta x = dx = 0$, on aura

$$\varsigma = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{d\omega}{dx}} = \frac{ds}{d\omega},$$

$$= \frac{ds^3}{\sqrt{\{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2\}}}.$$

Dans cette équation on a

$$ds = dx\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}};$$

on peut donc écrire :

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dx^2}-\frac{dx}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dx}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2}{d}\right.\right.}}$$

Cette valeur du ς est générale en ce sens qu'on n'y a considéré aucune des lettres x, y, z comme variable indépendante. Dans le cas où x serait la variable indépendante, il faudrait poser $\frac{d^2x}{dx^2}=0$, et alors on aurait :

$$\varsigma = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}}}.$$

Le cercle qui a ς pour rayon est le cercle de courbure.

Remarque. Si s est la variable indépendante, on a $d\left(\frac{ds}{ds}\right)=0$, ou $d^2s=0$, donc la formule (a) du paragraphe précédent se réduit à :

$$d\omega = \frac{\sqrt{\left\{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z^2)^2\right\}}}{ds};$$

$$\text{d'où}\quad \varsigma = \frac{ds}{d\omega} = \frac{ds^2}{\sqrt{\left\{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2\right\}}} = \frac{1}{\sqrt{\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}}}.$$

§ 56.

Plan osculateur.

Pour obtenir des formules plus générales, et plus symétriques nous supposerons que les coordonnées x, y, z soient des fonc-

tions d'une même variable indépendante v. Donc si v devient $v+\Delta v$, x, y, z deviendront

$$x_1 = x + \Delta x,\ y_1 = y + \Delta y,\ z_1 = z + \Delta z.$$

Si l'on change de nouveau dans ces résultats v en $v + \Delta v$, alors x_1, y_1, z_1 deviendront respectivement

$$x_1 + x_1\Delta = x_2,\ y_1 + \Delta y_1 = y_2,\ z_1 + \Delta z_1 = z_2.$$

Mais si l'on a une équation de la forme

$$F = F(x, y, z) = 0,$$

on aura, en changeant v en $v + \Delta v$,

$$F + \Delta F = F(x_1, y_1, z_1) = 0;$$

équation qui, à cause de $F = 0$, se réduit à

$$\Delta F = \Delta F(x, y, z) = 0.$$

Si l'on change de nouveau v en $v + dv$, alors F devenant $F + \Delta F$, ΔF deviendra $\Delta F + \Delta\Delta F$ ou $\Delta F + \Delta^2 F$;

on a donc l'équation

$$\Delta F + \Delta^2 F = F(x_2, y_2, z_2) = 0,$$

qui à cause de $\Delta F = 0$, devient

$$\underline{\Delta}^2 F = \underline{\Delta}^2 F(x, y, z) = 0.$$

Cela posé, soit

$$F = A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0,$$

équation dans laquelle x', y', z' sont supposés être des fonctions de v, il est clair que si v se change en $v + \underline{\Delta} v$, et en $v + 2\underline{\Delta} v$, les valeurs de $F = 0$, correspondantes à ces variations, seront :

$$\Delta F = A\Delta x' + B\Delta y' + C\Delta z' = 0,$$

$$\Delta^2 F = A\Delta^2 x' + B\Delta^2 y' + C\Delta^2 z' = 0.$$

Si l'on prend sur une courbe donnée trois points

$$M(x', y', z'),\ M'(x'', y'', z''),\ M''(x''', y''', z''')$$

situés de manière que les coordonnées de chacun se déduisent de celles du point qui le précède, en changeant v en $v + \underline{\Delta} v$, ces trois points détermineront un plan, tel que les constantes A, B, C de son équation varieront à mesure que $\underline{\Delta} v$ diminuera et prendront des valeurs déterminées a, b, c, quand Δv deviendra dv, c'est-à-dire zéro, ce qui aura lieu, quand les points M' et M'' viendront à coïncider avec le point $M(x', y', z')$. Ce plan,

dont l'équation est de la forme

$$a(x-x')+b(y-y')+c(z-z')=0,$$

se nomme le *plan osculateur* de la courbe donnée, au point donné $M(x',y',z')$.

ANALYSE.

Comme le plan passe par le point M son équation sera de la forme

$$F=A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

Mais en changeant v en $v+\Delta v$, les coordonnées x',y',z' deviennent x'',y'',z'', donc l'équation

$$A(x-x'')+B(y-y'')+C(z-z'')=0$$

exprime que le même plan passe aussi par le point M', condition qui, par ce qui précède, se réduit à

$$\Delta F=A\Delta x'+B\Delta y'+C\Delta z'=0.$$

Si nous changeons de nouveau v en $v+\Delta v$, ce qui revient à changer v en $v+2\Delta v$ dans les coordonnées x',y',z' du plan $F=0$, on exprimera que ce plan passe aussi par le point M", cette condition sera exprimée par l'équation

$$A(x-x''')+B(y-y''')+C(z-z''')=0,$$

qui, en vertu de ce qui précède, se réduit à

$$\Delta^2F=A\Delta^2x'+B\Delta^2y'+C\Delta^2z'=0.$$

Mais comme x',y',z' sont des fonctions de v, nous avons, par le Théorème de Taylor :

$$\frac{\Delta x'}{\Delta v}=\frac{dx'}{dv}+\Delta v\cdot P,\quad \frac{\Delta y'}{\Delta v}=\frac{dy'}{dv}+\Delta v\cdot P_1,\quad \frac{\Delta z'}{\Delta v}=\frac{dz'}{dv}+\Delta v\cdot P_2,$$

$$\frac{\Delta^2x'}{\Delta v^2}=\frac{d^2x'}{dv^2}+\Delta v\cdot Q,\quad \frac{\Delta^2y'}{\Delta v^2}=\frac{d^2y'}{dv^2}+\Delta v\cdot Q_1,\quad \frac{\Delta^2z'}{\Delta v^2}=\frac{d^2z'}{dv^2}+\Delta v\cdot Q_2.$$

Donc les conditions $\Delta F=0$, $\Delta^2F=0$, qu'on peut écrire aussi sous la forme $\frac{\Delta F}{\Delta v}=0$, $\frac{\Delta^2F}{\Delta^2v^2}=0$, deviennent :

$$\frac{\Delta F}{\Delta v}=A\left(\frac{dx'}{dv}+\Delta v\cdot P\right)+B\left(\frac{dy'}{dv}+\Delta v\cdot P_1\right)+C\left(\frac{dz'}{dv}+\Delta v\cdot P_2\right)=0,$$

$$\frac{\Delta^2 F}{\Delta v^2} = A\left(\frac{d^2x'}{dv^2} + \Delta v \cdot Q\right) + B\left(\frac{d^2y'}{dv^2} + \Delta v \cdot Q_1\right) + C\left(\frac{d^2z'}{dv^2} + \Delta v \cdot P_2\right) = 0.$$

Mais en faisant $\Delta v = 0$, A, B, C deviennent a, b, c, et l'on aura, pour déterminer ces inconnues, les équations

$$a\frac{dx'}{dv} + b\frac{dy'}{dv} + c\frac{dz'}{dv} = 0,$$

$$a\frac{d^2x'}{dv^2} + b\frac{d^2y'}{dv^2} + c\frac{d^2z'}{dv^2} = 0,$$

qui deviennent, en chassant les dénominateurs,

$$a\,dx' + b\,dy' + c\,dz' = 0,$$

$$a\,d^2x' + b\,d^2y' + c\,d^2z' = 0.$$

De ces équations on tire, par l'élimination,

$$\frac{a}{c} = \frac{dy'\,d^2z' - dz'\cdot d^2y'}{dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{dz'\,.\,d^2x' - dx'\,d^2z'}{dx'\,d^2y' - dy'\,.\,d^2x'}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation

$$a(x - x') + b(y - y') + c(z - z') = 0,$$

mise sous la forme

$$\frac{a}{c}(x - x') + \frac{b}{c}(y - y') + (z - z') = 0,$$

on aura l'équation du plan osculateur cherchée, savoir :

$$(x - x')\frac{dy'\,d^2z' - dz'\,d^2y'}{dx'\,d^2y' - dy'\,dx^{2'}} + (y - y')\frac{dx'\,d^2x' - dx'\,d^2z'}{dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x'} + (z - z') = 0, \quad \text{ou}$$

$$(dy'd^2z' - dz'\,d^2y')(x - x') + (dz'\,d^2x' - dx'\,d^2z')(y - y') + (z - z')(dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x') =$$

$$a(x - x') + b(y - y') + c(z - z') = 0,$$

$$a = dy'\,d^2z' - dz'\,d^2y', \quad b = dz'\,d^2x' - dx'\,d^2z',$$

$$c = dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x'.$$

Corollaire. Soient λ, μ, ν les angles que la perpendiculaire en $M(x', y', z')$ au plan osculateur fait avec les 3 axes des x, y, z, les équations de cette perpendiculaire seront :

$$(1)\quad y - y' = \frac{\cos\mu}{\cos\lambda}(x - x'), \quad z - z' = \frac{\cos\nu}{\cos\lambda}(x - x'). \qquad (2)$$

Les traces du plan osculateur sur les plans des yx et zx, seront

$$(1') \quad y - y' = -\frac{a}{b}(x - x') + \frac{c}{b}z',$$

$$z - z' = -\frac{a}{c}(x - x') + \frac{by'}{c}. \qquad (2')$$

La droite (1) étant perpendiculaire à la droite (1'), et la projection (2) perpendiculaire à la trace correspondante (2'), on a les relations

$$\frac{\cos\mu}{\cos\lambda} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\cos\nu}{\cos\lambda} = \frac{c}{a}.$$

On en tire :

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1 = \cos^2\lambda\left\{1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}\right\};$$

donc

$$\cos\lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\mu = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Si nous posons

$$k = \sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

on a

$$\cos\lambda = \frac{a}{k}, \quad \cos\mu = \frac{b}{k}, \quad \cos\nu = \frac{c}{k}.$$

Remarque. Quand on fait $v = x'$, x' devient la variable indépendante, et l'on aura $\frac{dx'}{dv} = \frac{dx'}{dx'} = 1$, donc $\frac{d\left(\frac{dx'}{dx'}\right)}{dx'} = \frac{d(1)}{dx'} = 0$; d'où $\frac{d^2x'}{dx'^2} = 0$, donc $d^2x' = 0$.

Les valeurs ci-dessus de a, b, c deviennent :

$$a = dy'd^2z' - dz'd^2y', \quad b = -dx'd^2z', \quad c = dx'd^2y'.$$

§ 57.

Angle de torsion.

Prenons sur une courbe de l'espace deux points $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$, situés de manière que l'on obtienne les coordonnées du second en changeant dans celles du 1^er^ v en $v+\Delta v$.

Soit $\Delta\Omega$ l'angle que font entre eux les plans osculateurs aux points M et M' de la courbe; cela posé, on nomme *angle de torsion* ce que devient $\Delta\Omega$, pour $\Delta v = 0$.

Analyse. Désignons par λ, μ, ν les angles que la perpendiculaire en M au plan osculateur de ce point fait avec les axes de x, y, z, on aura

$$\cos\lambda = \frac{a}{k} = a', \quad \cos\mu = \frac{b}{k} = b', \quad \cos\gamma = \frac{c}{k} = c'.$$

Soient λ', μ', ν' les angles que la perpendiculaire au point M' du 2^d^ plan osculateur fait avec les axes des x', y', z', alors en changeant v en $v+\Delta v$, les angles λ, μ, ν deviendront les angles λ', μ', ν', et l'on aura par conséquent

$$\cos\lambda' = a' + \Delta a', \quad \cos\mu' = b' + \Delta b', \quad \cos\nu' = c' + \Delta c'.$$

Cela posé, comme l'angle $\Delta\Omega$ est égal à l'angle des deux perpendiculaires aux plans osculateurs, il est manifeste que l'angle de torsion, sera égal à l'angle de contingence de ces deux perpendiculaire. On a donc, par le § 54, pour l'expression de l'angle de torsion

$$d\Omega = \sqrt{(da')^2 + (db')^2 + (dc')^2}.$$

Mais on a :

$$da' = \frac{kda - adk}{k^2}, \quad db' = \frac{kdb - bdk}{k^2}, \quad dc' = \frac{kdc - cdk}{k^2},$$

$$dk = d\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{ada + bdb + cdc}{k},$$

$$kdk = ada + bdb + cdc,$$

$$k^2 = a^2 + b^2 + c^2. \qquad \text{donc}$$

$$d\Omega = \frac{1}{k^2}\sqrt{(kda - adk)^2 + (kdb - bdk)^2 + (kdc - cdk)^2}$$

$$= \frac{1}{k^2}\sqrt{\left\{k^2(da^2 + db^2 + dc^2) - 2kdk\,(ada + bdb + cdc) + k^2dk^2\right\}}$$

$$= \frac{1}{k^2}\sqrt{\left\{(a^2+b^2+c^2)(da^2+db^2+dc^2)-(ada+bdb+cdc)^2\right\}}$$

$$d\Omega = \frac{1}{k^2}\sqrt{\left\{(bda-adb)^2+(cda-adc)^2+(bdc-cdb)^2\right\}}.$$

Mais on a :

$$a = dyd^2z - dzd^2y\,,\quad da = dyd^3z - dz\,d^3y\,,$$
$$b = dz\,d^2x - dx\,d^2z\,,\quad db = dz\,d^3x - dxd^3z\,,$$
$$c = dx\,d^2y - dy\,d^2x\,,\quad dc = dx\,d^3y - dy\,d^3z\,.$$

Donc, en posant

$$U = (d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y)dx + (d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z)dy + (d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x)\,dz\,,$$

on trouve :

$$adb - bda = dz\cdot U\,,\quad bdc - adb = dx\cdot U\,,\quad cda - adc = dy\cdot U\,;$$

on a donc :

$$d\Omega = \frac{1}{k^2}\sqrt{\left\{U^2(dx^2+dy^2+dz^2)\right\}}$$

$$= \frac{ds\cdot U}{k^2}$$

$$= ds\cdot\frac{(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y)\,dx + (d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z)\,dy + (d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x)dz}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

Rem. Quand x est la variable indépendante, on a $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, et alors l'expression précédente se réduit à :

$$d\Omega = ds\cdot\frac{(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y)dx}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dx\,d^2z)^2 + (dxd^2y)^2}.$$

§ 58.

Plan normal aux Courbes de l'Espace.

Si l'on conçoit une tangente à la courbe au point $M(x', y', z')$, et au même point un plan perpendiculaire à cette tangente, ce plan sera le *plan normal* à la courbe au point M.

Analyse. Tout plan passant par le point $M(x', y', z')$ de la

courbe a pour équation

$$A(x-x')+B(y-y')+c(z-z')=0. \qquad (1)$$

Quand ce plan est normal, ses traces sur les plans des xy et xz, seront respectivement perpendiculaires aux projections de la tangente sur les mêmes plans. Les traces dont il s'agit sont respectivement :

$$y-y'=-\frac{A}{B}(x-x')+\frac{C}{B}z',$$

$$z-z'=-\frac{A}{C}(x-x')+\frac{B}{C}y';$$

les projections de la tangente sont :

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x'), \quad z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x').$$

Les conditions de la perpendicularité donnent :

$$\frac{A}{B}\frac{dy'}{dx'}=1, \qquad \frac{A}{C}\frac{dz'}{dx'}=1.$$

On tire de ces équations

$$C=A\frac{dz'}{dx'}, \qquad B=A\frac{dy'}{dx'}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve :

$$(x-x')+(y-y')\frac{dy'}{dx'}+(z-z')\frac{dz'}{dx'}=0,$$

ou $$(x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'=0.$$

C'est l'équation cherchée du plan normal à la courbe donnée, au point $M(x', y', z')$.

Rem. Toute droite passant par M et située dans le plan normal, sera une normale à la courbe. De même, tout plan passant par la tangente en M, sera un plan tangent à la courbe.

§ 59.

Équation de la Sectrice.

Soient deux plans normaux à la courbe, le 1er au point $M(x', y', z')$, et le 2^{d} au point $M'(x'', y'', z'')$; le point M' est pris de telle sorte que ses coordonnées se déduisent des coordonnées du

point M, en changeant dans celles-ci, qu'on suppose, comme toujours, être des fonctions de v, v en $v+\Delta v$. Les deux plans normaux se couperont en général suivant une droite, dont les constantes changeront de valeur à mesure que Δv diminue. Soient

$$y-y'=A(x-x')+C,$$
$$z-z'=B(x-x')+D,$$

les équations de cette droite d'intersection, si l'on désigne par A', B', C', D' ce que deviennent les quatre constantes A, B, C, D, quand on pose $\Delta v=dv=0$, les équations

$$y-y'=A'(x-x')+C',$$
$$z-z'=B'(x-x')+D',$$

seront celles d'une droite idéale, qui, à cause du fréquent usage qu'on en fait, mérite un nom particulier; je la nommerai *Sectrice*.

Analyse. Le plan normal en $M(x', y', z')$ donne

$$F=(x-x')\frac{dx'}{dv}+(y-y')\frac{dy'}{dv}+(z-z')\frac{dz'}{dv}=0. \quad (1)$$

Le plan normal en $M'(x'', y'', z'')$ donne de même

$$F'=(x-x'')\frac{dx''}{dv}+(y-y'')\frac{dy''}{dv}+(z-z'')\frac{dz''}{dv}=0.$$

Mais quand v devient $v+\Delta v$ le point M devient le point M', on a donc

$$F'=F+\Delta F=0,$$

équation qui, à cause de $F=0$, se réduit à

$$\Delta F=\Delta\left[(x-x')\frac{dx'}{dv}+(y-y')\frac{dy'}{dv}+(z-z')\frac{dz'}{dv}\right]=0.$$

Mais on a, par le Théorème de Taylor

$$\frac{\Delta F}{\Delta v}=\frac{dF}{dv}+\Delta v\cdot P; \qquad \text{donc}$$

$$\frac{d\left[(x-x')\frac{dx'}{dv}+(y-y')\frac{dy'}{dv}+(z-z')\frac{dz'}{dv}\right]}{dv}+\Delta v\cdot P=0.$$

Pour $\Delta v=0$, on a :

$$(x-x')\frac{d^2x'}{dv^2}-\left(\frac{dx'}{dv}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y'}{dv^2}-\left(\frac{dy'}{dv}\right)^2+$$
$$(z-z')\frac{d^2z'}{dv^2}-\left(\frac{dz'}{dv}\right)^2=0,$$

ou $(x-x')\frac{d^2x'}{dv^2}+(y-y')\frac{d^2y'}{dv^2}+(z-z')\frac{d^2z}{dv^2}=\frac{ds'^2}{dv^2}$. (2)

Donc les équations de la Sectrice sont données par l'existence simultanée des deux plans (1) et (2).

En éliminant $z-z'$, $y-y'$ successivement entre ces équations, on trouve, en supprimant les dénominateurs dv, dv^2,

$$y-y'=\frac{b}{a}(x-x')-\frac{1}{a}\,ds'^2\,dz',$$

$$z-z'=\frac{c}{a}(x-x')+\frac{1}{a}\cdot ds'^2dy';$$

on a posé comme toujours

$$a=dy'\,d^2z'-dz'\,d^2y',$$
$$b=dz'\,d^2x'-dx'\,d^2z',$$
$$c=dx'\,d^2y'-dy'\,d^2x',$$
$$ds'^2=dx'^2+dy'^2+dz'^2.$$

Rem. Si l'on nomme u, w, t les angles que cette droite forme avec l'axe des x, des y et des z, on trouve, par les principes connus de la Géométrie analytique

$$\cos u=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos w=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos t=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

D'où l'on conclut $u=\lambda$, $w=\mu$, $t=\nu$; (§ 56), par conséquent la Sectrice est perpendiculaire au plan osculateur en M.

§ 60.

Coordonnées du point d'intersection de la Sectrice et du plan Osculateur au point M(x', y', z').

Les coordonnées de ce point d'intersection sont évidemment les valeurs de x de y et de z, tirées des équations

$$y-y'=\frac{b}{a}(x-x')-\frac{1}{a'}ds'^2dz',$$

$$z-z'=\frac{c}{a}(x-x')+\frac{1}{a'}ds'^2dy',$$

$$a(x-x')+b(y-y')+c(z-z')=0,$$

considérées comme ayant lieu simultanément.

L'élimination conduit à :

$$x-x'=\frac{b\,dz'-c\,dy'}{a^2+b^2+c^2}\cdot ds'^2,$$

$$y-y'=\frac{c\,dx'-a\,dz'}{a^2+b^2+c^2}\cdot ds'^2,$$

$$z-z'=\frac{a\,dy'-b\,dx'}{a^2+b^2+c^2}\cdot ds'^2.$$

§ 61.

Cercle Osculateur.

Considérons deux points M(x',y',z') M'(x'',y'',z'') d'une courbe, le second s'obtenant en changeant dans les coordonnées du 1er v en $v+\Delta v$, il est clair que, d'après le § 50, le cercle osculateur de chacun de ces points sera situé dans les plans osculateurs relatifs à ces points. De plus, le centre de chacun sera situé dans le plan passant par ce point normalement au plan osculateur correspondant. Mais en faisant $\Delta v=0$, les deux points venant à coïncider, il en sera de même des deux plans osculateurs, et le centre du cercle osculateur en M se trouvera à la fois dans les deux plans normaux, c'est-à-dire sur la Sectrice. Il suit de là, que le centre du cercle osculateur en M sera le point d'intersection de la Sectrice et du plan osculateur. Le rayon du cercle osculateur au point M sera par conséquent la distance entre ce point d'intersection et le point M.

Analyse. Soient r le rayon du cercle osculateur, x,y,z les coordonnées de son centre, données par le § 60, on aura, pour calculer r, la relation

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2.$$

En substituant à la place de $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ leurs valeurs du paragraphe précédent, on obtient

$$r^2=ds'^4\cdot\frac{(bdz'-cdy')^2+(cdx'-adz')^2+(ady'-bdx')}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Mais on a

$$b dz' - c dy' = dz'^2 d^2x' - dz' dx' d^2z' - dy' dx' d^2y' + dy'^2 d^2x' ;$$

ajoutons et retranchons $dx'^2 d^2x'$, nous aurons

$$b dz' - c dy' = ds'^2 d^2x' - dx' \cdot ds' d^2s'.$$

On trouvera de même :

$$c dx' - a dz' = ds'^2 d^2y' - dy' ds' d^2s' ,$$
$$a dy' - b dx' = ds'^2 d^2z' - dz' ds' d^2s' ;$$

en élevant au carré, et en ajoutant, on trouve :

$$(b dz' - c dy')^2 + (c dx' - a dz')^2 + (a dy' - b dx')^2 =$$
$$ds'^4 [(d^2x')^2 + (d^2y')^2 + (d^2z')^2 - d^2s')^2] .$$

Mais on trouve aussi facilement

$$a^2 + b^2 + c^2 = ds'^2 [(d^2x')^2 + (d^2y')^2 + (d^2z')^2 - (d^2s')^2] ; \quad (1)$$

on a donc

$$r = \frac{ds'^2}{\sqrt{(d^2x')^2 + (d^2y')^2 + (d^2z')^2 - (d^2s')^2}} .$$

Mais on tire de la formule (1),

$$(d^2x')^2 + d^2y')^2 + (d^2z')^2 - (d^2s')^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ds'^2} =$$
$$\frac{(dy' d^2z' - dz' d^2y')^2 + (d'z d^2x' - dx' d^2z')^2 + (dx' d^2y' - dy' d^2x')^2}{ds'^2} ;$$

on a donc aussi

$$r = \frac{ds'^3}{\sqrt{\{(dy' d^2z' - dz' d^2y')^2 + (dz' d^2x' - dx' d^2z')^2 + (dx' d^2y - dy' d^2x')\}}} ;$$

d'où $r = \varsigma ;$ (§ 55)

donc le rayon du cercle osculateur est le même que celui du rayon de courbure.

Rem. 1re. Soient η, θ, ζ les angles que le rayon r fait avec les trois axes, on aura :

$$x - x' = r \cos \eta , \quad y - y' = r \cos \theta , \quad z - z' = r \cos \zeta .$$

De plus r est perpendiculaire à la Sectrice, on a donc

$$\cos u \cos \eta + \cos w \cos \theta + \cos t \cos \zeta = 0 ,$$

ou $$\frac{a}{k} \cdot \frac{x - x'}{r} + \frac{b}{k} \cdot \frac{y - y'}{r} + \frac{c}{k} \cdot \frac{z - z'}{r} = 0 ;$$

d'où $a(x-x')+b(y-y')+c(z-z')=0$,

ce qui est l'équation du plan osculateur.

Rem. 2^me^. A mesure que Δv diminue le cercle qui passe par trois points M, M', M'' diffèrera de moins en moins de la courbe dans le voisinage de M; donc, si $\Delta v=0$, la courbure du cercle osculateur ne diffèrera plus de celle de la courbe au point M, donc $\frac{1}{r}$ peut être considérée comme la mesure de cette courbure; elle sera d'autant moindre que r sera plus grand, et *vice-versâ*.

§ 62.

Surface polaire.

On nomme Surface polaire le lieu des Sectrices correspondant aux divers points d'une courbe de l'espace.

Analyse. Soient $y=\varphi x$, $z=\psi x$ les équations de la courbe, en éliminant x', y', z' entre $y'=\varphi x', \psi x'$, et les équations de la Sectrice, on aura une relation entre x, y, z, qui sera l'équation de la Surface cherchée.

§ 63.

Sphère osculatrice.

En considérant sur une courbe quatre points M(x', y', z'), M'(x'', y'', z''), M''(x''', y''', z'''), M'''(x^{IV}, y^{IV}, z^{IV}), situés de manière que les coordonnées de chacun s'obtiennent en changeant dans celles du point qui le précède v en $v+\Delta v$, ces quatre points détermineront une sphère dont l'équation

$$(x-A)^2+(y-B)^2+(z-c)^2=R^2, \qquad (1)$$

renfermera quatre constantes A, B, C, R. Ces constantes varient à mesure que Δv diminue, c'est-à-dire à mesure que les points M', M'', M''' s'approchent de M. Soient $A=\alpha$, $B=\beta$, $C=\gamma$, $R=\varsigma$, les valeurs de ces constantes correspondantes à $\Delta v=0$, c'est-à-dire celles qu'elles obtiennent quand les quatre points se réunissent en M, la Sphère qui a pour équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2, \qquad (2)$$

se nomme la Sphère osculatrice de la courbe au point M.

Le centre de la Sphère (1) est le point de concours des trois droites qui résultent : 1° de l'intersection des plans normaux en M et M' ; 2° de celles des plans normaux en M' et M'' ; 3° enfin de l'intersection des plans normaux en M'' et M'''. Mais comme ces trois droites doivent concourir au même point, il est clair que le centre, dont il s'agit, s'obtiendra par les deux premières de ces droites d'intersection.

Analyse. Soit

$$F=(x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'=0 \qquad (1$$

le plan normal en M.

Celui en M' sera $F+\Delta F=F'=0$, et se réduit à :

$$\Delta F=\Delta\left\{(x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'\right\}=0. \qquad (2$$

Le plan normal au point M'' aura pour équation

$$F'+\Delta F'=F+2\Delta F+\Delta^2F=0,$$

qui se réduit à

$$\Delta^2F=\Delta^2\left\{(x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'\right\}=0. \qquad (3$$

Les trois équations $F=0$, $\Delta F=0$, $\Delta^2F=0$, considérées comme simultanées, détermineront le centre de la Sphère du rayon R. Mais pour $\Delta v=0$, hypothèse pour laquelle les quatre points se réunissent en M, les équations ci-dessus se changeront en celles-ci :

$$F=(x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'=0,$$

$$dF=(x-x')d^2x'+(y-y')d^2y'+(z-z')d^2z'-ds'^2=0,$$

$$d^2F=(x-x')d^3x'+(y-y')'d^3y'+(z-z')d^3z'-3ds'd^2s'=0;$$

de ces équations, on tire les coordonnées du centre de la Sphère osculatrice, en les résolvant par rapport à x, y et z. L'équation (2) fera connaître le rayon de la même sphère.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL AUX SURFACES.

§ 64.

Plan tangent.

Problème. *Étant donnée une surface* $F(x,y,z)=0$ ou $z=f(x,y)$, *et un point* $M'(x',y',z')$ *de cette surface, chercher le lieu de toutes les tangentes à la surface au point* M'.

Solution. Les équations de la tangente au point M' d'une courbe quelconque, tracée sur la surface, sont :

(1 $$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x'),$$

(2 $$z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x').$$

Pour le point M' l'équation $z=f(x,y)$ de la surface devient :

$$z'=f(x',y').$$

Cette équation donne, par la différentiation,

$$dz'=\left(\frac{dz'}{dx'}\right)dx'+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)dy';$$

d'où : $$\frac{dz'}{dx'}=\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)\frac{dy'}{dx'}. \qquad (3$$

Des équations (1 et (2 on tire

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{y-y'}{x-x'},\quad \frac{dz'}{dx'}=\frac{z-z'}{x-x'}.$$

En éliminant $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dx'}$ valeurs qui fixent la position de la tangente, le résultat, indépendant de cette position, sera évidemment le lieu cherché. Or l'élimination donne

$$\frac{z-z'}{x-x'} = \left(\frac{dz'}{dx'}\right) + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)\frac{y-y'}{x-x'},$$

ou $$\left(\frac{dz'}{dx'}\right)(x-x') + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)(y-y') - (z-z') = 0; \qquad (4)$$

c'est l'équation d'un plan ; le lieu de toutes les tangentes est un plan tangent à la surface au point M'. Donc (4) est l'équation du plan tangent.

Rem. Si l'équation de la surface avait la forme implicite

$$F(x, y, z) = 0,$$

on trouverait, pour les deux dérivées partielles :

$$\left(\frac{dF}{dx'}\right) + \left(\frac{dF}{dz'}\right)\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF}{dy'}\right) + \left(\frac{dF}{dz'}\right)\left(\frac{dz'}{dy'}\right) = 0;$$

ou $$\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dx'}\right)}{\left(\frac{dF}{dz'}\right)}, \quad \left(\frac{dz'}{dy'}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dy'}\right)}{\left(\frac{dF}{dz'}\right)};$$

par suite, l'équation du plan tangent devient :

$$(x-x')\left(\frac{dF}{dx'}\right) + (y-y')\left(\frac{dF}{dy'}\right) + (z-z')\left(\frac{dF}{dz'}\right) = 0.$$

Exemple. Pour l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, on trouve

$$\left(\frac{dF}{dx'}\right) = \frac{2x'}{a^2}, \quad \left(\frac{dF}{dy'}\right) = \frac{2y'}{b^2}, \quad \left(\frac{dF}{dz'}\right) = \frac{2z'}{c^2}.$$

Donc le plan tangent au point $M'(x', y', z')$ de cette surface, a pour équation

$$\frac{(x-x')x'}{a^2} + (y-y')\cdot\frac{y'}{b^2} + (z-z')\frac{z'}{c^2} = 0,$$

ou $$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1.$$

§ 64_a.

Surfaces de contact, et osculatrices.

Soient les deux surfaces $z = f(x,y)$, $z = \varphi(x,y)$, ayant le point $M(x,y,z)$ commun, on aura, par le Théorème de Taylor :

$$f(x+h,y+k) - \varphi(x+h,y+k) = f(x,y) - \varphi(x,y) +$$
$$\left[\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)-\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right\}h + \left\{\left(\frac{df}{dy}\right)-\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\right\}k\right] +$$
$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left\{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\right\}h^2 + 2\left\{\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)-\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)\right\}hk +$$
$$\left\{\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)-\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)\right\}k^2\right] + \text{.etc.}$$

On dit que la surface $z = \varphi(x,y)$ a avec la surface $z = f(x,y)$ un contact du 1er ordre quand on a les trois équations

$$\varphi(x,y) = f(x,y),$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right),$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \left(\frac{df}{dy}\right).$$

Le contact sera du 2^d ordre, quand, outre les équations précédentes, on a les relations

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right),\quad \left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^2f}{dxdy}\right),\quad \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right).$$

Donc, pour qu'une Surface $z = \varphi_n(x,y)$, soit osculatrice au point $M(x,y,z)$ de la Surface $z = f(x,y)$, il faut que son contact de l'ordre le plus élevé, fournisse autant d'équations que la Surface φ_n renferme de constantes à déterminer. Cette condition ne peut pas toujours être remplie. Pour la Sphère, par exemple, dont l'équation

$$(z-\gamma)^2 + (x-\alpha^2) + (y-\beta)' = R^2,$$

renferme quatre constantes, le contact du 1er ordre ne fournit que trois équations, tandis que celui du 2^d ordre en fournit six, en sorte que les quatre constantes ne peuvent être déterminées ni par l'un, ni par l'autre de ces systèmes d'équations; il n'existe donc pas

de Sphère osculatrice. Il n'en sera pas de même des Surfaces dont l'équation générale est

$$z_n = a + bx_1 + cy_1 + dx_1^2 + ex_1y_1 + \ldots + mx_1y_1^{n-1} + py_1^n, \quad = \varphi_n(x_1y_1)$$

que nous nommerons *paraboloïdes*.

Des Paraboloïdes osculateurs.

1° Paraboloïde osculateur du 1er ordre.

Le paraboloïde du 1er ordre a pour équation

$$z_1 = a + bx_1 + cy_1 = \varphi_1(x_1y_1), \qquad (1)$$

c'est un plan. Comme cette Surface renferme trois constantes, elle sera osculatrice, lorsqu'on déterminera ces constantes en établissant un contact du 1er ordre avec la Surface $z = f(x,y)$; à l'aide des trois équations :

$$\varphi(x_1y_1) = f(x,y) \quad \text{ou} \quad z_1 = z \quad \text{donc} \quad x_1 = x_1 \; y_1 = y;$$

$$\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad \left(\frac{dz_1}{dy_1}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Mais on a :

$$\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right) = b, \quad \left(\frac{dz_1}{dy_1}\right) = c,$$

donc

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = b, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = c,$$

$$z_1 = z, \quad x = z - \left(\frac{dz}{dx}\right)x_1 - \left(\frac{dz}{dy}\right)y_1.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve :

$$z_1 - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)(x_1 - x) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(y_1 - y).$$

Donc le paraboloïde osculateur du 1er ordre en $M(x,y,z)$ de la Surface $z = f(x,y)$, est son plan tangent en ce point.

2° Paraboloïde osculateur du second ordre.

Le paraboloïde du 2d ordre a pour équation

$$z_2 = a + bx_1 + cy_1 + dx_1^2 + ex_1y_1 + fy_1^2 = \varphi_2(x_1y_1). \qquad (2)$$

Les six constantes $a, b, \ldots f$, se détermineront au moyen des équations, au nombre de six, exigées pour un contact du 2^d ordre, savoir :

$$z_2 = z, \quad \left(\frac{dz_2}{dx_1}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad \left(\frac{dz_2}{dy_1}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z_2}{dx_1^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \quad \left(\frac{d^2z_2}{dx_1dy_1}\right) = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right), \quad \left(\frac{d^2z_2}{dy_2^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

On a ainsi les six équations

$$z = a + bx + cy + dx^2 + exy + fx^2,$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = b + 2dx + ey, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = c + ex + 2fy,$$

$$\left(\frac{dz^2}{dx^2}\right) = 2d, \quad \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = e, \quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = 2f,$$

et par conséquent :

$$a = z - \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) - x\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - y\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\right]x$$

$$- \left[\left(\frac{dz}{dy}\right) - x\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) - y\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]y$$

$$- \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)x^2 - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)xy - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)y^2 ;$$

$$b = \left(\frac{dz}{dx}\right) - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)x - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)y,$$

$$c = \left(\frac{dz}{dy}\right) - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)x - \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)y,$$

$$d = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

$$e = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right),$$

$$f = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (2), on obtient l'équation du paraboloïde osculateur du 2^d ordre, savoir :

$$z_2 = z - \left(\frac{dz}{dx}\right)x - \left(\frac{dz}{dy}\right)y + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)x^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)xy + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)y^2\right] +$$

$$\left[\left(\frac{dz}{dx}\right) - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)y - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)x\right]x_1 +$$

$$\left[\left(\frac{dz}{dy}\right) - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)x - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)y\right]y_1 +$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)x_1^2 + 2\left(\frac{d_2z}{dxdy}\right)x_1y_1 + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)y_1^2\right]$$

$$= a + bx_1 + cy_1 + dx_1^2 + ex_1y_1 + fy_1^2. \qquad (3)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme plus élégante :

$$z_1 - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)(x_1 - x) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(y_1 - y) +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)(x_1 - x)^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)(x_1 - x)(y_1 - y) +\right.$$

$$\left.\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)(y_1 - y)^2\right]. \qquad (3')$$

Classification des Paraboloïdes osculateurs du 2^d ordre.

Changeons la position de l'axe des x et des y, de manière que le nouvel axe des x, fasse avec l'ancien un angle θ, c'est-à-dire posons

$$x_1 = x' \cos\theta - y' \sin\theta,$$

$$y_1 = x' \sin\theta + y' \cos\theta,$$

l'équation (3) deviendra :

$$z_1 = a + [b\cos\theta + c\sin\theta]x' + [c\cos\theta - b\sin\theta]y' +$$

$$[d\cos^2\theta + e\cos\theta\sin\theta + f\sin^2\theta]x'^2 +$$

$$[2f\sin\theta\cos\theta + e(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2d\cos\theta\sin\theta]x'y' +$$

$$[d\sin^2\theta - e\sin\theta\cos\theta + f\cos^2\theta]y'^2. \qquad (4)$$

Pour faire disparaître le terme en $x'y'$, il faut déterminer θ par la relation

$$2f\sin\theta\cos\theta + e(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2d\cos\theta\sin\theta = 0,$$

ou $$f\cdot\sin 2\theta + e\cos 2\theta - d\sin 2\theta = 0;$$

ce qui donne

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{e}{d-f}.$$

Comme on a :

$$\sin 2\theta = \frac{\operatorname{tg} 2\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta}}, \quad \cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta}},$$

on trouve facilement

$$\sin 2\theta = \frac{e}{\sqrt{e^2+(d-f)^2}}, \quad \cos 2\theta = \frac{d-f}{\sqrt{e^2+(d-f)^2}};$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2\{(d-f)\sqrt{e^2+(d-f)^2}+e^2+(d-f)^2\}}},$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos^2\theta}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2\{e^2+(d-f)^2-(d-f)\sqrt{e^2+(d-f)^2}\}}}.$$

Par là l'équation (4) deviendra :

$$\begin{aligned} z_2 &= a + [b\cos\theta + c\sin\theta]x' + [c\cos\theta - b\sin\theta]y' + \\ &\quad [d\cos^2\theta + \tfrac{1}{2}e\sin 2\theta + f\sin^2\theta]x'^2 + \\ &\quad [d\sin^2\theta - \tfrac{1}{2}e\sin 2\theta + f\cos^2\theta]y'^2 \\ &= a + b'x + c'y' + d'x'^2 + e'y'^2; \end{aligned} \qquad (5)$$

équation dans laquelle on a :

$$b' = \frac{eb}{\sqrt{2\{(d-f)^2+e^2-(d-f)\sqrt{(d-f)^2+e^2}\}}} + \frac{ec}{\sqrt{2\{(d-f)\sqrt{(d-f)^2+e^2}+(d-f)^2+e^2\}}},$$

$$c' = \frac{ce}{\sqrt{2\{(d-f)^2+e^2-(d-f)\sqrt{(d-f)^2+e^2}\}}} - \frac{be}{\sqrt{2\{(d-f)\sqrt{(d-f)^2+e^2}+(d-f)^2+e^2\}}},$$

$$(\alpha) \qquad d' = \frac{de^2}{2\{(d-f)\sqrt{(d-f)^2+e^2}-(d-f)^2+e^2\}} + \frac{e^2}{2\sqrt{e^2+(d-f)^2}} + \frac{fe^2}{2\{(d-f)^2+e^2+(d-f)\sqrt{(d-f)^2+e^2}\}},$$

$$(\beta) \qquad e' = \frac{de^2}{2\{(d-f)\sqrt{(d-f)^2+e^2}+(d-f)^2+e^2\}} - \frac{e^2}{2\sqrt{e^2+(d-f)^2}} + \frac{fe^2}{2\{(d-f)^2+e^2-(d-f)\sqrt{(d-f)^2+e^2}\}}.$$

1° En supposant que d' et e' ne soient pas nuls, nous pourrons faire disparaître de l'équation (5) les termes du 1er degré, en changeant l'origine des coordonnées, à l'aide des équations $x' = x'' + \alpha$, $y'' = y'' + \beta$, ce qui donnera :

$$z_2 = [\alpha + b'\alpha + c'\beta + d'\alpha^2 + e'\beta^2] + (b' + 2d'\alpha)x'' + (c' + 2e'\beta)y'' + d'x''^2 + e'y''^2.$$

Posons $\alpha = -\frac{b'}{2d'}$, $\beta = -\frac{c'}{2e'}$, $k = \alpha + b'\alpha + c'\beta + d'\alpha^2 + e'\beta^2$,

l'équation ci-dessus deviendra :

$$z_2 = k + d'x''^2 + e'y''^2.$$

Soit encore $z_2 = z'_2 + k$, on trouvera, enfin

$$z'_2 = d'x''^2 + e'y''^2.$$

Cette équation, en renferme deux autres selon que d' et e' sont de même signe, ou de signe contraire, et l'on a, en conséquence

$$z'_2 = d'x''^2 + e'y''^2, \qquad \text{(I)}$$

$$z'_2 = d'x''^2 - e'y''^2. \qquad \text{(II)}$$

L'équation (I) est celle des paraboloïdes elliptiques. Car quand z'_2 est constant, on a des Sections elliptiques, et quand x'' ou y'' sont constants, on obtient des Sections paraboliques.

L'équation (II) est celle des paraboloïdes hyperboliques. En effet, quand z est constant les Sections parallèles au plan des xy sont des paraboles, et quant x' ou y' sont constants, les sections parallèles aux deux autres plans, sont des paraboles.

Remarque. Les équations (α) et (β) donnent, par addition et soustraction :

$$d' + e' = f + d,$$

$$d' - e' = \sqrt{e^2 + (d-f)^2};$$

d'où

$$d' = \frac{f+d}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{e^2 + (d-f)^2},$$

$$e' = \frac{f+d}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{e^2 + (d-f)^2}.$$

Donc d' et e' sont les racines de l'équation

$$u^2 - (f+d)u + fd - \tfrac{1}{4}e^2 = 0.$$

Pour que ces racines soient de même signe on doit avoir $fd - \frac{1}{4}e^2 > 0$,

d'où $e^2 - 4fd < 0$ ou $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) < 0.$

Pour que les mêmes racines soient de signes contraires, on devra avoir $fd-\frac{1}{4}e^2<0$, ou

$$e^2-4fd>0, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2-\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)>0.$$

Nous concluons de là que le paraboloïde osculateur du 2^d ordre, savoir :

$$z_1-z=\left(\frac{dz}{dx}\right)(x_1-x)+\left(\frac{dz}{dy}\right)(y_1-y)+$$
$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)(x_1-x)^2+2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)(x_1-x)(y_1-y)+\right.$$
$$\left.\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)(y_1-y)^2\right],$$

sera un paraboloïde elliptique ou hyperbolique selon que l'on aura :

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2-\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)<0, \qquad \text{ou}$$
$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2-\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{dz^2}{dy^2}\right)>0.$$

2° Supposons maintenant que l'un des coëfficients d' ou e', soit nul, que l'on ait, par exemple $d'=0$. Dans ce cas l'équation du paraboloïde osculateur devient :

$$z_1=a+b'x'+c'y'+e'y'^2.$$

On fera disparaître le terme en y' en posant

$$y'=y''+\beta, \quad \text{et} \quad \beta=\frac{-c'}{2e'}, \quad z_1=z'_1+(a+c'\beta+e'\beta^2),$$

et il vient :

$$z'_1=b'x'+e'y''^2. \qquad \text{(III)}$$

Cette équation est celle d'un cylindre parabolique. En effet, quand z'_1 est constant, les Sections parallèles au plan des xy sont des paraboles ; quand x' est constant on obtient encore des Sections paraboliques parallèles au plan des yz. Mais en prenant y'' constant on obtient des Sections rectilignes parallèles, ce qui est le caractère des Surfaces cylindriques.

Remarque. L'équation $u^2-(f+d)u+fd-\frac{1}{4}e^2=0$, dont les racines sont d' et e', fait voir que quand l'une de ces racines est nulle, on devra avoir $fd-\frac{1}{4}e^2=0$ ou $e^2-4fd=0$, ou

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2-\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=0.$$

Ce caractère exprime donc la condition pour que le paraboloïde osculateur du 2d ordre soit un cylindre parabolique.

Paraboloïdes osculateurs du 3me ordre.

L'équation du paraboloïde du 3me ordre est

$$z_3 = a + bx_1 + cy_1 + dx_1^2 + ex_1y_1 + fy_1^2 + gx_1^3 + hx_1^2y_1 + kx_1y_1^2 + ly_1^3. \quad (5)$$

Ce paraboloïde devient osculateur quand on détermine les 10 constantes $a, b, \ldots k, l,$ à l'aide des 10 équations

$$z_3 = z,\ \left(\frac{dz_3}{dx_1}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right),\ \left(\frac{dz_3}{dy_1}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z_3}{dx_1^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),\ \left(\frac{d^2z}{dy_1^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right),\ \left(\frac{d^2z_3}{dx_1dy_1}\right) = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right);$$

$$\left(\frac{d^3z_3}{dx_1^3}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right),\ \left(\frac{d^3z_3}{dx_1^2dy_1}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^3z_3}{dx_1dy_1^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right),\ \left(\frac{d^3z_3}{dy_1^3}\right) = \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right),$$

En substituant les valeurs trouvées dans l'équation (5), on aura

$$z_3 - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)(x_1 - x) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(y_1 - y) +$$

$$\frac{1}{1\cdot2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)(x_1-x)^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)(x_1-x)(y_1-y) + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)(y_1-y)^2\right] +$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left[\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)(x_1-x)^3 + 3\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)(x_1-x)^2(y_1-y) +\right.$$

$$\left. 3\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)(x_1-x)(y_1-y)^2 + \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)(y_1-y)^3\right].$$

Remarque. Il est facile de voir qu'à l'aide des paraboloïdes osculateurs des 1er, 2me, 3me, etc. ordre, on pourra construire autant de termes que l'on voudra de la formule générale de Maclaurin,

$$f(x_1, y_1) - f(x, y) = \left(\frac{dz}{dx}\right)(x_1-x) + \left(\frac{dz}{dx}\right)(y_1-y) +$$

$$\frac{1}{1\cdot2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)(x_1-x)^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)(x_1-x)(y_1-y) +\right.$$

$$\left.\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)(y_1-y)^2\right] + \text{etc.},$$

et par suite de celle de Taylor :

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = \left(\frac{dz}{dx}\right)h + \left(\frac{dz}{dy}\right)k + \frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)h^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)hk + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)k^2\right] + \text{etc.}$$

Classification des Surfaces.

Concevons par les points $M(x,y,z)$, $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ de la Surface $z = f(x,y)$ un plan perpendiculaire au plan des xy, sa trace sur ce plan fera avec l'axe des x un angle θ, donné par la relation

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = t.$$

La valeur de t déterminera la direction du plan sécant ci-dessus. Si ce plan coupe la Surface suivant une droite, elle sera sa propre tangente, et sera comme telle située dans le plan tangent au point M. Soit donc $x_1 = x + \Delta x$, $y_1 = y + \Delta y$, $z_1 = z + \Delta z$, on aura

$$z_1 - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)(x_1 - x) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(y_1 - y) = \left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right)\Delta y. \quad (6)$$

pour l'équation du plan tangent à laquelle la Section rectiligne devra satisfaire.

Mais on a, en général :

$$z_1 - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right)\Delta y + \frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\Delta x^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\Delta x\Delta y + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\Delta y^2\right] + \text{etc.}$$

Donc, quand la Section, dont il s'agit, est une droite, on aura, à cause de l'équation (6) :

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\Delta x^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\Delta x\Delta y + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\Delta y^2\right] + \text{etc.} = 0.$$

Mais on peut prendre Δx, Δy assez petits pour que chaque terme de cette somme, indiqué par les crochets, soit plus grand que la somme de tous les termes qui suivent; on peut donc poser

séparément :

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\Delta x^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\Delta x\Delta y + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\Delta y^2 = 0, \quad (7)$$

etc.

L'équation (7) peut s'écrire de cette manière :

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)t + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0, \qquad \text{d'où :}$$

$$t = -\frac{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)}{\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)} \pm \frac{\sqrt{\left\{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\}}}{\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)}. \quad (\alpha)$$

DISCUSSION DE L'ÉQUATION (α).

1^er^ *Cas.* Soit $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) < 0.$ (α)

Dans ce cas les valeurs de t seront imaginaires, et la Surface n'admettra en aucun de ses points des Sections rectilignes. Si nous faisons $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, le trinôme

$$dz = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy^2$$

étant toujours positif ou négatif, selon que $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ sera positif, ou négatif, il suit que les Sections autour du point M, auront la même courbure, convexe ou concave. De plus, le paraboloïde osculateur dn 2^d^ degré, au point M de cette Surface, sera, à cause de l'équation (α) le paraboloïde elliptique.

2^me^ *Cas.* Soit $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \omega;$ (β)

alors t n'a qu'une seule valeur. Il existe donc, pour chaque point de la Surface une direction unique suivant laquelle un plan sécant coupe toujours la Surface suivant une ligne droite. C'est là le caractère des Surfaces développables. Comme (β) exprime aussi la condition pour que le paraboloïde osculateur du 2^d^ degré soit un cylindre parabolique, l'on voit que cette Surface sera le paraboloïde osculateur du 2^d^ degré en un point quelconque des Surfaces développables.

3^me *Cas.* Soit $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) > 0$; (γ

alors les deux valeurs de t seront réelles, et il se présentera trois cas :

1° Les deux valeurs de t déterminent des Sections rectilignes; ce qui arrivera, quand pour ces valeurs on aura :

$$d^3z = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)dx^3 + 3\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)dx^2dy + 3\left(\frac{d^3z}{dxd^2y}\right)dxdy^2 + \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)dy^3 = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = t.$$

2° Une seule valeur de t détermine une Section rectiligne, alors l'autre valeur déterminera une Section courbe ayant un point d'inflexion en M. Car pour les points d'inflexion, on a également

$$d^2z = dx^2\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 0,$$

donc $$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)t + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)t^2 = 0.$$

Ce cas se présente quand la Surface est une Surface gauche réglée.

3° Les deux valeurs de t déterminent des Sections curvilignes, mais ayant chacune en M un point d'inflexion. Ce sont les Surfaces non-réglées, mais à double courbure, concave-convexe ou convexe-concave.

De plus, la relation (γ fait voir que cette 3^me classe de Surfaces, avec ses trois variétés, 1°, 2°, 3°, se distingue des deux autres en ce que leur paraboloïde osculateur du 2^d ordre pour chacun de leurs points, est le paraboloïde hyperbolique.

Il y a donc, en résumé, trois classes de Surfaces :

1° Les Surfaces non-réglées, et à simple courbure; elles ont pour paraboloïde osculateur du 2^d ordre, le paraboloïde elliptique.

2° Les Surfaces réglées développables; elles ont pour paraboloïde osculateur du 2^d ordre, le cylindre parabolique.

3° Les Surfaces réglées gauches, ou non-réglées et à double courbure; elles ont pour paraboloïde osculateur du 2^d ordre, le paraboloïde hyperbolique.

§ 65.

Normales aux Surfaces.

Si au point $M'(x', y', z')$ de contact du plan tangent on élève une perpendiculaire à ce plan, cette droite se nomme une normale à la Surface au point M'. Il suit de là, que la projection de la normale sur l'un des trois plans des coordonnées est perpendiculaire à la trace du plan tangent sur le même plan des coordonnées. Cherchons les équations de la normale.

Les équations d'une droite quelconque passant par le point M', sont de la forme

$$y - y' = m(x - x'), \quad z - z' = n(x - x'). \qquad (1$$

Ce seront donc celles de la normale, si les projections que ces équations représentent sont respectivement perpendiculaires aux traces sur les plans xy, xz, du plan tangent. Mais en faisant dans l'équation de ce plan successivement $z=0$, $y=0$, on obtiendra ces traces, savoir :

$$y - y' = -\frac{(\frac{dz'}{dx'})}{(\frac{dz'}{dy'})}(x - x') - \frac{z'}{(\frac{dz'}{dy'})}.$$

$$z - z' = (\frac{dz'}{dx'})(x - x') - (\frac{dz'}{dy'})y'.$$

Les conditions de la perpendicularité sont :

$$m \cdot \frac{(\frac{dz'}{dx'})}{(\frac{dz'}{dy'})} = 1, \quad n(\frac{dz'}{dx'}) = -1;$$

on a donc

$$m = \frac{1}{\frac{(\frac{dz'}{dx'})}{(\frac{dz'}{dy'})}}, \quad n = -\frac{1}{(\frac{dz'}{dx'})}.$$

Les équations de la normale sont par conséquent

$$y-y'=\frac{(\frac{dz'}{dy'})}{(\frac{dz'}{dx'})}(x-x'),\quad z-z'=-\frac{1}{(\frac{dz'}{dx'})}$$

Remarque. Cherchons la condition pour que deux normales à la même Surface se rencontrent.

Soient $M'(x',y',z')$, $M''(x'+\Delta x', y'+\Delta y', z'+\Delta z')$, les deux points. Faisons pour abréger

$$(\frac{dz'}{dx'})=p,\quad (\frac{dz'}{dy'})=q,$$

les équations de la normale au point M' seront

$$F=(y-y')p-(x-x')q=0, \qquad (1$$

$$F_1=(z-z')p+(x-x')=0. \qquad (2$$

Par conséquent celles du point M'' seront

$$F+\Delta F=0,\quad F_1+\Delta F_1=0,$$

équations qui se réduisent à

$$\Delta F=\Delta\{(y-y')p-(x-x')q\}=0, \qquad (3$$

$$\Delta F=\Delta\{(z-z')p+(x-x')\}=0. \qquad (4$$

Les quatre équations (1, (2, (3, (4, donneront les coordonnées x, y, z du point de rencontre des deux normales, plus une équation de condition qui doit être satisfaite pour que les deux normales se renaontrent. Cette condition se trouve facilement pour le cas où les deux nomales viennent à coïncider, ce qui suppose $\Delta x'=0$. En effet, dans ce cas les deux équations (3 et (4 se changent en celles-ci :

$$d[(y-y')p-(x-x')q]=0,$$

$$d[(z-z')p+(x-x')]=0,$$

ou

$$-pdy'+(y-y')dp+qdx'-(x-x')dq=0, \qquad (3'$$

$$-pdz'+(z-z')dp-dx'=0. \qquad (4'$$

Les équations (4', (2 et (1 donnent :

$$z-z'=\frac{dx'+pdz'}{dp},$$

$$x-x'=-\frac{pdx'+p^2dx'}{dp},$$

$$y-y'=-\frac{qdx'+pqdz'}{dp}.$$

Les valeurs de x, y, z déduites de ces équations sont ce que deviennent les coordonnées du point d'intersection des deux normales lorsqu'on fait $\Delta x' = dx' = 0$, c'est-à-dire lorsque ces lignes viennent à coïncider. En substituant les valeurs précédentes dans l'équation (3', la relation résultante

$$dp(pdy' + pqdz') - [pdx' + p^2dz']dq = 0, \qquad (5)$$

exprimera ce que devient l'équation de condition de la rencontre des deux normales dans l'hypothèse $\Delta x' = dx' = 0$.

Développons l'équation (5).

A cet effet, posons

$$\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right) = r, \quad \left(\frac{d^2z'}{dx'dy'}\right) = s, \quad \left(\frac{d^2z'}{dy'^2}\right) = t,$$

on aura :

$$dz' = \left(\frac{dz'}{dx'}\right)dx' + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)dy' = pdx' + qdy',$$

$$dp = \left(\frac{dp}{dx'}\right)dx' + \left(\frac{dp}{dy'}\right)dy' = rdx' + sdy',$$

$$dq = \left(\frac{dq}{dx'}\right)dx' + \left(\frac{dq}{dy'}\right)dy' = sdx' + tdy'.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (5), on trouve, en ordonnant :

$$\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2[s(1+q^2) - pqt] + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)[r(1+q^2) - t(1+p^2)] - [s(1+p^2) - pqr] = 0. \qquad (\alpha)$$

§ 66.

Plans normaux aux Surfaces.

Si au point de contact d'une tangente en M'(x', y', z') d'une Surface, on mène un plan perpendiculaire à cette ligne, il renfermera la normale en ce point, et se nomme un *plan normal* à la Surface au point M'. Cherchons son équation; elle sera de la forme

$$(1) \qquad A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

Ses traces avec les plans des xy, xz seront

$$y - y' = -\frac{A}{B}(x - x') + \frac{Cz'}{B},$$

$$z - z' = -\frac{A}{C}(x - x') + \frac{By'}{C}.$$

Mais la tangente, à laquelle ce plan est perpendiculaire, a pour équations :

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'),$$

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x').$$

La condition de perpendicularité donne :

$$\frac{A}{B}\frac{dy'}{dx'} = 1, \quad \frac{A}{C}\frac{dz'}{dx'} = 1 ; \quad \text{d'où}$$

$$B = A\frac{dy'}{dx'}, \quad C = A\frac{dz'}{dx'}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), il vient :

$$(x - x')dx' + (y - y')dy' + (z - z')dz' = 0 ; \qquad (2)$$

ou $$x - x' + (y - y')\frac{dy'}{dx'} + (z - z')\frac{dz'}{dx'} = 0.$$

C'est l'équation cherchée.

On peut lui donner une forme propre à mettre un évidence l'indétermination de cette équation. Car, soient α, β, γ les angles que la tangente quelconque en M' fait avec les trois axes, on aura

$$\cos\alpha = \frac{dx'}{ds'}, \quad \cos\beta = \frac{dy'}{ds'}, \quad \cos\gamma = \frac{dz'}{ds'} ;$$

donc l'équation ci-dessus devient :

$$(x - x')\cos\alpha + (y - y')\cos\beta + (z - z')\cos\gamma = 0. \qquad (3)$$

Les coëfficients de cette équation n'étant donnés que par la relation unique

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

il suit qu'elle est indéterminée. Au reste, on conclut la même chose de la relation (2), dans laquelle les trois coëfficients dx', dy', dz' ne sont donnés que par la relation unique

$$dz' = \left(\frac{dz'}{dx'}\right)dx' + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)dy'. \qquad (5)$$

tirée de l'équation de la Surface.

En mettant dans (2) pour dz' sa valeur (5), on trouve

$$dx'\left[(x-x')+\left(\frac{dz'}{dx'}\right)(z-z')\right]+dy'\left[(y-y')+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)(z-z')\right]=0\,;$$

d'où : $x-x'+\left(\frac{dz'}{dx'}\right)(z-z')=0,\ y-y'+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)(z-z')=0.$

De ces équations on déduit

$$(6)\quad z-z'=-\frac{1}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}(x-x'),\ y-y'=\frac{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}(x-x').$$

Donc le plan normal renferme la normale au point M', et par conséquent tous les plans normaux se coupent suivant une même droite (6) normale à la surface.

Remarque. On nomme *Section normale*, toute Section faite dans la Surface par un plan normal, et Section oblique toute Section faite dans la Surface par un plan quelconque non normal.

§ 67.

Courbure des Sections normales et obliques.

1°

CENTRE ET COURBURE DES SECTIONS NORMALES.

Le plan osculateur au point M' de la Section normale en ce point a pour Sectrice la droite donnée par les deux équations

$$(1\qquad (x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'=0,$$

$$(2\qquad (x-x')d^2x'+(y-y')d^2y'+(z-z')d^2z'-ds'^2=0.$$

Le point de rencontre de cette droite avec le plan osculateur correspondant est le centre du rayon de courbure de la Section normale en M'. Mais ce centre est aussi à l'intersection de la Sectrice et de la normale au point M', dont les équations sont :

$$(3\qquad y-y'=\frac{q}{p}(x-x'),\quad z-z'=-\frac{1}{p}(x-x').\qquad (4$$

Donc le centre du rayon de courbure de la Section normale en

M', se trouvera par ces équations, et ses coordonnées auront pour valeur celles de x, y, z tirées des équations

$$(5 \quad \begin{cases} z - z' = \dfrac{1}{H}, \\ y - y' = -\dfrac{q}{H}, \\ x - x' = -\dfrac{p}{H}, \\ H = \dfrac{d^2z' - p\,d^2x' - q\,d^2y'}{ds'^2}. \end{cases}$$

Le rayon de courbure ς de la même Section au point M', sera

$$\varsigma = \sqrt{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}},$$
$$= \frac{\sqrt{\{1 + p^2 + q^2\}}}{H}.$$

Substituons dans H, pour d^2z' sa valeur, tirée de l'équation de la Surface. A cet effet on a :

$$dz' = p\,dx' + q\,dy',$$

donc

$$dz'^2 = p\,d^2x' + q^2dy' + r\,dx'^2 + 2s\,dx'dy' + t\,dy'^2,$$

donc

$$H = r\left(\frac{dx'}{ds'}\right)^2 + 2s\,\frac{dx'}{ds'}\,\frac{dy'}{ds'} + t\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2.$$

Soient α, β, γ les angles que la tangente à la Section normale au point M fait avec les axes des coordonnées, on aura

$$\cos\alpha = \frac{dx'}{ds'}, \quad \cos\beta = \frac{dy'}{ds'}, \quad \cos\gamma = \frac{dz'}{ds'}.$$

Donc (6 $\quad H = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta,$

et

$$\varsigma = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

2°

CENTRE ET COURBURE DES SECTIONS OBLIQUES.

Si par la tangente ci-dessus on conçoit un plan sécant incliné de l'angle ω à la Section normale passant par la même tangente, on

aura une Section oblique, qui jouira de la propriété que sa Sectrice passe par le centre du cercle de courbure de la Section normale correspondante, quelque soit ω.

En effet, la Sectrice de la Section oblique et la normale en M' se rencontrent, puisque ces droites sont évidemment situées dans le même plan, normal à la Section oblique. Les équations de la Sectrice de la Section oblique sont de la même forme que les équations (1 et (2; donc le point de rencontre de cette droite avec la normale, est donnée par les relations (5. Ce point de rencontre ne change pas de place quand ω varie; en effet, la formule (6 fait voir que H reste constant aussi longtemps que les angles α, β, γ ne varient pas, c'est-à-dire aussi longtemps que la tangente commune aux deux Sections ne change pas de position. On obtient par conséquent la Sectrice de la Section oblique, en abaissant du centre de courbure de la Section normale une perpendiculaire sur le plan de la Section oblique; le pied de cette perpendiculaire sera le centre, sa distance au point M', le rayon de courbure ς_1 de la Section oblique. Donc,

Le rayon de courbure de la Section oblique est la projection sur son plan du rayon de courbure de la Section normale correspondante, ayant avec la 1re *Section une tangente commune*, c'est-à-dire, l'on a :

$$\varsigma_1 = \varsigma \cos \omega ;$$

c'est le *Théorème de Meusnier.*

§ 68.

Sections normales principales.

Il existe en chaque point d'une Surface quelconque deux Sections normales dont l'une a la plus grande, et l'autre la plus petite courbure $\frac{1}{\varsigma}$.

Ces deux Sections normales se nomment les *Sections principales* de la Surface au point que l'on considère.

Analyse. Le maximum ou le minimum de $\varsigma = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{H}$, dépend du minimum on du maximum de

$$H = r \cos^2\alpha + 2s \cos\alpha \cos\beta + t \cos^2\beta ;$$

ce qui fournit la condition

$$dH = (r\cos\alpha + s\cos\beta)\,d\cos\alpha + (s\cos\alpha + t\cos\beta)\,d\cos\beta = 0. \quad (1)$$

Cherchons la condition pour que les angles α, β, γ, soient ceux d'une tangente au point M′ de la Surface. Pour cela, on a

$$z - z' = p(x - x') + q(y - y') \quad (2)$$

pour l'équation du plan tangent en M′, qui contiendra la tangente en M′. Mais on a :

$$z - z' = k\cos\gamma, \quad y - y' = k\cos\beta, \quad x - x' = k\cos\alpha,$$

donc (2) devient

$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta, \quad \text{ou}$$

$$\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = p\cos\alpha + q\cos\beta, \quad \text{ou}$$

$$(1 + p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1 + q^2)\cos^2\beta = 1, \quad (3$$

c'est la condition cherchée.

(3 donne

$$[(1 + p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta]\,d\cos\alpha = -[(1 + q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha]\,d\cos\beta;$$

(1 donne

$$(r\cos\alpha + s\cos\beta)\,d\cos\alpha = -(s\cos\alpha + t\cos\beta)\,d\cos\beta,$$

d'où, en divisant :

$$\frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{(1 + p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta} = \frac{t\cos\beta + s\cos\alpha}{(1 + q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha}. \quad (4$$

Cette équation jointe à l'équation (3, et à la relation $\varsigma = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{H}$, détermineront les valeurs de α, β, ς, qui conviennent aux Sections principales. L'élimination se fait facilement quand on observe, que si l'on donne

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \text{donc} \quad \frac{am}{bm} = \frac{cn}{dn}, \quad \text{on a} \quad \frac{a}{b} = \frac{am + cn}{bm + dn} = \frac{c}{d}.$$

D'après cela, multiplions les deux termes du 1er membre de (4 par $\cos\alpha$, ceux du 2^{d} par $\cos\beta$, puis ajoutons les numérateurs entre eux, ainsi que les dénominateurs, la fraction résultante $\frac{H}{1}$ sera égale à chacun des membres de l'équation (4. On a donc :

$$r\cos\alpha + \varsigma\cos\beta = H[(1 + p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta],$$

$$t\cos\beta + \varsigma\cos\alpha = H[(1 + q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha];$$

ou
$$\left.\begin{aligned}[\mathrm{H}(1+p^2)-r]\cos\alpha &= (s-pq\,\mathrm{H})\cos\beta,\\ [\mathrm{H}(1+q^2)-t]\cos\beta &= (s-pq\,\mathrm{H})\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

En multipliant ces équations entre elles, on obtient :

$$[\mathrm{H}(1+p^2)-r][\mathrm{H}(1+q^2)-t]=(s-pq\,\mathrm{H})^2, \qquad \text{ou}$$

$$(1+p^2+q^2)\mathrm{H}^2-[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]\mathrm{H}+rt=s^2. \qquad (5$$

Cette équation fera connaître les deux valeurs de H relatives aux Sections principales. Si nous éliminons H à l'aide de l'équation

$$\varsigma=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\mathrm{H}},$$

nous trouvons

$$(rt-s^2)\varsigma^2-\varsigma\sqrt{1+p^2+q^2}[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]+(1+p^2+q^2)^2=0. \qquad (b)$$

Cette équation donne les rayons de courbure des deux Sections principales; le nombre de ces Sections résulte du degré de l'équation (*b*).

Remarque. Soient ς_1, ς_2 les deux racines de cette équation, on aura :

$$\varsigma_1\cdot\varsigma_2=-\frac{(1+p^2+q^2)^2}{s^2-rt}.$$

Le numérateur de cette expression étant positif, le signe du produit $\varsigma_1\cdot\varsigma_2$ dépendra de celui du dénominateur s^2-rt. Donc

1° Si l'on a $s^2-rt<0$, les deux rayons de courbure ς_1, ς_2 seront de même signe; cela arrivera dans les Surfaces de la 1re classe, à simple courbure (concave ou convexe), car ces Surfaces sont caractérisées par la relation $s^2-rt<0$.

2° Si l'on a $s^2-rt>0$, relation qui convient aux Surfaces réglées gauches, ou à double courbure (concave-convexe), les deux rayons ς_1 et ς_2 seront de signes contraires.

3° Dans les Surfaces développables pour lesquelles on a $s^2-rt=0$, l'on voit que le rayon de courbure de l'une des Sections principales est infinie.

4° Pour que l'on puisse avoir $\varsigma_1=\varsigma_2$, ou des ombélics, il faut que l'on ait $s^2-rt<0$, donc les points ombélicaux n'existent que dans les Surfaces de la 1re classe.

§ 69.

Propriétés des Sections principales.

Prenons le point $M'(x', y', z')$ pour origine, le plan tangent en ce point pour le plan des x, y; on aura :

$$x' = 0,\ y' = 0,\ z' = 0,\ z = 0,\quad \cos\beta = \sin\alpha.$$

L'équation du plan tangent devient

$$px + qy = 0;$$

d'où : $p = 0$, $q = 0$. Soient r_1, s_1, t_1 ce que deviennent r, s, t, l'on voit que l'expression du rayon de courbure d'une Section normale $\varsigma = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{H}$, devient :

$$\varsigma = \frac{1}{r_1\cos^2\alpha + 2s_1\cos\alpha\cos\beta + t_1\cos^2\beta}, \qquad (0)$$

ou

$$\varsigma = \frac{1}{r_1\cos 2\alpha + 2s_1\cos\alpha\cos\beta + t_1\sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\varsigma} = \frac{r_1+t_1}{2} + \frac{r_1-t_1}{2}\cos 2\alpha + s_1\sin 2\alpha. \qquad (1')$$

Les Sections principales répondent aux valeurs de

$$\frac{d\left(\frac{1}{\varsigma}\right)}{d\alpha} = 0,$$

ou à

$$-(r_1-t_1)\sin 2\alpha + 2s_1\cos 2\alpha = 0,$$

d'où :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2s_1}{r_1-t_1}. \qquad (2)$$

α ne variant qu'entre 0 et π, cette équation ne fournira que deux valeurs pour 2α, savoir 2α, et $2\alpha+\pi$. Donc les Sections principales sont rectangulaires entre elles, puisque leurs angles d'inclinaison α, par rapport à l'axe des x, sont α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Donc, dans l'équation (1), ς sera un maximum pour l'une de ces valeurs, et un minimum pour l'autre. En effet, l'expression $\frac{d^2\left(\frac{1}{\varsigma}\right)}{d\alpha^2}$, change de signe de l'une à l'autre de ces valeurs.

Faisons $\alpha = 0$, alors xz sera le plan de l'une de ces Sections, et l'on aura par (2) $s_1 = 0$. Donc (0) devient :

$$\frac{1}{\varsigma} = r_1 \cos^2\alpha + t_1 \sin^2\alpha. \qquad (3)$$

Soit ς_1, ς_2 les valeurs de ς correspondantes à $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on aura par (3)

$$\frac{1}{\varsigma_1} = r_1, \quad \frac{1}{\varsigma_2} = t_1. \qquad (4)$$

Ces équations déterminent les valeurs des rayons de courbure des Sections principales.

Les valeurs de r_1, t_1, changent (3) en

$$\frac{1}{\varsigma} = \frac{1}{\varsigma_1} \cos^2\alpha + \frac{1}{\varsigma_2} \sin^2\alpha ; \qquad (5)$$

c'est l'expression du rayon de courbure d'une Section normale quelconque, en fonction des rayons de courbure des Sections principales.

Remplaçons dans (5), α par $\alpha + \frac{\pi}{2}$, et nommons ς' le rayon de courbure de la Section normale correspondante, perpendiculaire à celle qui répond à α, on aura :

$$\frac{1}{\varsigma'} = \frac{1}{\varsigma_1} \sin^2\alpha + \frac{1}{\varsigma_2} \cos^2\alpha. \qquad (6)$$

Les équations (5) et (6) donnent :

$$\frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{\varsigma'} = \frac{1}{\varsigma_1} + \frac{1}{\varsigma_2}.$$

Donc *la somme des courbures de deux Sections normales rectangulaires, est constante et égale à la somme des courbures des Sections principales.*

§ 70.

Des Ombélics.

Quand le point $M'(x', y', z')$ est tel, que l'on a

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}, \qquad (1)$$

on aura aussi

$$\frac{(1+p^2)(1+q^2)}{rt} = \frac{p^2q^2}{s^2}, \quad \frac{(1+p^2)(1+q^2)}{p^2q^2} = \frac{rt}{s^2},$$

et $$1+p^2+q^2 = p^2q^2 \cdot \frac{rt-s^2}{s^2}.$$

Donc l'équation aux rayons de courbure des Sections principales devient :

$$\varsigma^2 - \frac{2pq(1+p^2+q^2)}{s} \cdot \varsigma + \frac{p^2 \cdot q^2}{s^2}(1+p^2+q^2) = 0.$$

Cette équation a ses racines égales

$$\varsigma_1 = \varsigma_2 = \frac{pq}{s}(1+p^2+q^2).$$

Les points de la Surface qui jouissent de cette propriété $\varsigma_1 = \varsigma_2$, se nomment des *Ombélics.*

Les deux équations (1), jointes à celles de la Surface, servent à déterminer ces points.

§ 71.

Lignes de Courbure.

On nomme *lignes de courbure* des lignes tracées sur une Surface quelconque de manière que deux normales consécutives de ces courbes se rencontrent. Donc, si l'on cherche la condition du concours de deux normales aux points $M(x', y', z')$, $M'(x'+\Delta x', y'+\Delta y', z'+\Delta z')$. En y faisant $\Delta x = 0$, on aura l'équation différentielle des lignes de courbure. Cette équation est, (voy. § 66) :

$$\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2[s(1+q^2) - pqt] + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)[r(1+q^2) - t(1+p^2)] - [s(1+p^2) - pqr] = 0.$$

Cette équation étant du 2^d degré, l'on voit qu'à chaque point M de la Surface répondent deux lignes de courbure.

Je dis que les deux lignes de courbure au point M, sont à angle droit, ou que leurs tangentes en ce point se confondent avec celles des Sections principales au même point.

En effet, soient α, β, γ les angles avec les axes de la tangente en M à la Section principale, on a trouvé la relation :

$$\frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{t\cos\beta + s\cos\alpha} = \frac{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta}{(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha};$$

d'où :

$$\frac{r + s\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}}{t\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + s} = \frac{(1+p^2) + pq\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}}{(1+q^2)\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + pq}.$$

Mais on a $\cos\alpha = \frac{dx'}{ds'}$, $\cos\beta = \frac{dy'}{ds'}$, $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{dy'}{dx'}$, donc

$$\frac{r + s\cdot\dfrac{dy'}{dx'}}{t\dfrac{dy'}{dx'} + s} = \frac{1 + p^2 + pq\dfrac{dy'}{dx'}}{(1+q^2)\dfrac{dy'}{dx'} + pq}; \quad \text{d'où :}$$

$$\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2[s(1+q^2) - pqt] + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)[r(1+q^2) - t(1+p^2)] - [s(1+p^2) - pqr] = 0, \quad (a)$$

équation identique avec l'équation différentielle des lignes de courbure.

Donc les deux tangentes en M aux Sections principales, coïncident avec celles des lignes de courbure, donc ces lignes, ou leurs tangentes en M, se coupent à angle droit.

Remarque. On simplifie l'équation (a) en prenant pour plan des x, y un plan parallèle au plan tangent au point $M'(x', y', z')$ de la Surface; car alors on aura $p=0$, $q=0$, et l'équation ci-dessus deviendra :

$$\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + \frac{r-t}{s}\left(\frac{dy'}{dx'}\right) - 1 = 0. \qquad (a')$$

Soient a_1 et a_2 les deux racines de cette équation, on aura :

$$a_1 = \frac{t-r+\sqrt{4s^2+(t-r)^2}}{2s},$$

$$a_2 = \frac{t-r-\sqrt{4s^2+(t-r)^2}}{2s},$$

$$a_1 a_2 + 1 = 0.$$

Il y a donc en chaque point $M'(x', y', z')$ deux lignes de courbures perpendiculaires entre elles. De plus,

1° Si $s^2 - tr < 0$, le point $M'(x', y', z')$, aura pour son ordonnée z' une valeur maxima ou minima, à cause de $p=0$ et $q=0$. Ce qui ne pourra arriver que dans les Surfaces de la classe de celles à simple courbure.

2° Si $s^2 - tr = 0$ ou $s^2 - tr > 0$, l'ordonnée z' ne sera ni un maximum ni un minimum, quoique l'on ait $p=0$, $q=0$. Le plan tangent en M', pourra être en même temps un plan sécant. Cela arrivera, par exemple, pour les Surfaces à double courbure (concave-convexe).

§ 72.

Génération des Surfaces.

I.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES SURFACES CYLINDRIQUES.

La propriété caractérisque des Surfaces cylindriques consiste en ce que chaque plan tangent à la Surface est parallèle à une droite fixe.

Analyse. Soient $\left.\begin{matrix} x = az \\ y = bz \end{matrix}\right\}$ les équations de la droite fixe.

$$z - z' = \left(\frac{dz'}{dx'}\right)(x-x') + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)(x-x')$$

l'équation du plan tangent à la Surface au point $M'(x', y', z')$.

Donc $$1 = a\left(\frac{dz'}{dx'}\right) + b\left(\frac{dz'}{dy'}\right),$$

est la condition pour que ce plan soit parallèle à la droite ci-dessus. Par conséquent, pour que cette condition ait lieu pour tout point

M(x, y, z) de la Surface, on doit avoir :

$$a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) = 1, \quad \text{ou} \quad ap + bq = 1.$$

III.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES SURFACES CONIQUES.

La propriété caractéristique des Surfaces coniques, consiste en ce que leur plan tangent en un point quelconque passe par le point fixe, sommet du cône.

Analyse. Soit S(α, β, γ) le sommet du cône, soit

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)(y - y')$$

le plan tangent en M$'(y', y', z')$ de la Surface $z = F(x, y)$; cela posé, pour qu'il passe par s, il faut que l'on ait

$$\gamma - z' = \frac{dz'}{dx'}(\alpha - x') + \frac{dz'}{dy'}(\beta - y').$$

Donc, pour que cela ait lieu en un point quelconque M(x, y, z) on doit avoir :

$$(x - \alpha)\frac{dz}{dx} + (y - \beta)\frac{dz}{dy} = z - \gamma, \quad \text{ou}$$

$$(x - \alpha)p + (y - \beta)q = z - \gamma.$$

III.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES SURFACES CONOÏDES.

La propriété caractéristique des conoïdes consiste en ce que :

1° Le plan tangent doit contenir la génératrice passant par le point de contact,

2° Couper l'axe des z en un point dont le z est égal à celui du point de contact.

Analyse. L'équation du plan tangent

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y')$$

doit être satisfaite par $x = 0$, $y = 0$, $z = z'$, ce qui donne :

$$x' \frac{dz'}{dx'} + y' \frac{dz'}{dy'} = 0.$$

Cette relation doit être satisfaite pour un point quelconque $M(x, y, z)$ de la Surface, on a donc

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = 0, \quad \text{ou} \quad px + qy = 0.$$

IV.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

La propriété caractéristique des Surfaces de révolution consiste en ce que la normale, menée en un quelconque de leurs points, rencontre l'axe de révolution.

ANALYSE. Soient $\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\}$ les équations de l'axe,

$$\left.\begin{aligned} x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z') &= 0, \\ y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z') &= 0, \end{aligned}\right\}$$ les équations de la normale en M'.

Pour que ces droites se rencontrent, on doit avoir

$$\frac{x' - \alpha + z' \frac{dz'}{dx'}}{\frac{dz'}{dx'} + a} = \frac{y' - \beta + z' \frac{dz'}{dy'}}{\frac{dz'}{dx'} + b},$$

d'où :

$$(y - bz - \beta)p - (x - az - \alpha)q = b(x - \alpha) - a(y - \beta).$$

V.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES SURFACES DÉVELOPPABLES.

Une Surface développable peut être regardée comme engendrée par une droite mobile qui reste constamment tangente à une courbe donnée fixe.

ANALYSE. Soient $\left.\begin{aligned} x &= \varphi z \\ y &= \psi z \end{aligned}\right\}$ les équations de la courbe fixe.

Une de ses tangentes dont le point de contact répond à $z=\alpha$, est

$$x-\varphi\alpha=\varphi'\alpha(z-\alpha),$$
$$y-\psi\alpha=\psi'\alpha(z-\alpha).$$

En éliminant $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, $\varphi'\alpha$, $\psi'\alpha$, on trouve

$$rt-s^2=0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=0.$$

VI.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES SURFACES GAUCHES.

a) Surface gauche engendrée par une droite qui glisse sur deux directrices quelconques, en restant constamment parallèle à un plan fixe donné.

Analyse. Soient $\left.\begin{matrix} z=\alpha \\ y=\beta x+\gamma \end{matrix}\right\}$ les équat. de la génératrice,

$\left.\begin{matrix} F=0 \\ F_1=0 \end{matrix}\right\}$ les équations de la 1re directrice,

$\left.\begin{matrix} f=0 \\ f_1=0 \end{matrix}\right\}$ celles de l'autre directrice.

Il faut exprimer que la génératrice s'appuie constamment sur les deux directrices, ce qui donne, en éliminant x, y, z, les deux équations

$$\beta=\varphi(\alpha), \quad \gamma=\psi(\alpha).$$

Éliminons α, β, γ, entre ces équations et celles de la génératrice, on aura

(1) $$y=x\varphi z+\psi z \quad \text{ou} \quad y=x\varphi_1 z+\gamma\psi_1 z.$$

En différentiant (1) par rapport à x, y, on a :

$$0=\varphi z+x\varphi' z\cdot p+\psi' z\cdot p,$$
$$1=x\varphi' z\cdot q+\psi' z\cdot q,$$
$$\frac{p}{q}=-\varphi z.$$

En différentiant de nouveau, on a

$$\frac{qr-ps}{q^2}=-\varphi' z\cdot p, \quad \frac{qs-pt}{q^2}=-\varphi' z\cdot q,$$

d'où, en divisant:

$$q^2r - 2pqs + p^2t \quad 0.$$

b) Surfaces gauches engendrées par une droite qui glisse sur trois directrices quelconques.

ANALYSE. Soient $\left.\begin{matrix} x = \alpha z + \gamma \\ y = \beta z + \delta \end{matrix}\right\}$ les équat. de la génératrice,

$\left.\begin{matrix} F = 0 \\ F_1 = 0 \end{matrix}\right\}$ les équat. de la 1re directrice,

$\left.\begin{matrix} F_2 = 0 \\ F_3 = 0 \end{matrix}\right\}$ celles de la 2de,

$\left.\begin{matrix} F_4 = 0 \\ F_5 = 0 \end{matrix}\right\}$ les équat. de la 3me directrice,

il faut exprimer que la génératrice rencontre les trois directrices, ce qui fournira des équations de conditions de la forme

$$\beta = \varphi\alpha, \quad \gamma = \psi\alpha, \quad \delta = \xi\alpha,$$

qui conduiront aux équations

$$\left.\begin{matrix} x = \alpha z + \psi\alpha \\ y = z\varphi\alpha + \xi\alpha. \end{matrix}\right\} \quad (1)$$

Le système (1), dans lequel α reste à éliminer, représente l'équation finie de la Surface. On obtiendra son équation différentielle, en éliminant les fonctions φ, ψ, ξ.

VII.

SURFACES ENVELOPPES.

Soit $F(x, y, z, \alpha) = 0$, une Surface renfermant un paramètre α, si l'on change

$$\alpha \text{ en } \alpha + \Delta\alpha, \ \alpha + 2\Delta\alpha, \text{ etc.}$$

Les Surfaces consécutives

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0,$$

$$F(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0, \quad F(x, y, z, \alpha + 2\Delta\alpha) = 0, \text{ etc.}$$

se couperont respectivement suivant des courbes f, f_1, etc., dont le lieu géométrique est nommé la *Surface enveloppe* de la proposée.

ANALYSE. On a :

$$\frac{F(x,y,z,\alpha+\Delta\alpha)}{\Delta\alpha} = F(x,y,z,\alpha) + \frac{dF(x,y,z,\alpha)}{d\alpha} + \Delta\alpha\cdot P = 0$$

$$= \frac{dF(x,y,z,\alpha)}{d\alpha} + \Delta\alpha\cdot P = 0.$$

Pour $\Delta\alpha = 0$, on a

$$\frac{dF(x,y,z,\alpha)}{d\alpha} = 0.$$

Donc, en éliminant α entre cette équation et la proposée $F(x,y,z,\alpha) = 0$, l'équation résultante de la forme

$$f(x,y,z) = 0,$$

sera l'équation de la Surface enveloppe.

1^er^ *Exemple.* Chercher l'enveloppe d'une Sphère dont le Centre glisse sur l'axe des x, et dont l'extrémité du rayon se meut sur une ellipse ayant pour équation

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Pour $x = \alpha$, soit le rayon r de la Sphère $= r'$, l'équation de la Sphère pour cette valeur de x, sera :

$$(x-\alpha)^2 + y^2 + z^2 - r'^2 = 0.$$

L'équation correspondante de l'Ellipse sera

$$y = 0, \quad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{r'^2}{c^2} = 1; \quad \text{d'où} \quad r'^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2-\alpha^2).$$

On a donc, pour l'équation de la Sphère

$$F = (x-\alpha)^2 + y^2 + z^2 - \frac{c^2}{a^2}(a^2-\alpha^2) = 0.$$

donc

$$\frac{dF}{d\alpha} = -(x-\alpha) + \frac{c^2}{a^2}\cdot\alpha = 0.$$

De celle-ci on tire $\alpha = \frac{a^2x}{a^2+c^2}$, donc $F = 0$ devient :

$$\frac{x^2}{a^2+c^2} + \frac{y^2+z^2}{c^2} = 1;$$

c'est l'équation d'un ellipsoïde de révolution, ou à deux axes égaux.

2^me^ *Exemple.* Chercher l'enveloppe d'une Sphère de rayon constant r dont le centre glisse sur l'axe des x.

Soit $x = \alpha$, une position déterminée du centre, l'équation de la Sphère correspondante sera

$$F = (x-\alpha)^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 ; \qquad \text{d'où}$$

$$\frac{dF}{d\alpha} = x - \alpha = 0.$$

En éliminant α, il vient

$$y^2 + z^2 = r^2,$$

équation d'un cylindre droit.

Remarque. Si l'on a

$$F = F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \beta = \varphi\alpha,$$

on aura

$$\frac{dF}{d\alpha} = \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) + \left(\frac{dF}{d\beta}\right)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

3^me^ *Exemple.* Trouver l'équation de l'enveloppe d'une Sphère mobile d'un rayon constant, dont le centre (α, β) se meut dans le plan des xy sur une courbe dont l'équation est

$$\beta = \varphi\alpha. \qquad (a)$$

Il faut éliminer α entre les équations

$$F = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 - r^2 = 0'. \qquad (1)$$

$$\frac{dF}{d\alpha} = x + (y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0. \qquad (2)$$

(2) est l'équation d'un plan normal à la courbe (a); donc la *caractéristique*, ou la courbe d'intersection des Surfaces $F = 0$, $\frac{dF}{d\alpha} = 0$, est un grand cercle normal à la courbe (a), quelque soit cette courbe.

Si la fonction φ est donnée, on pourra effectuer l'élimination. Par exemple, soit

$$\beta = \sqrt{a^2 - \alpha^2}, \text{ on aura } \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{-\alpha}{\sqrt{a^2-\alpha^2}},$$

donc, en éliminant α, on obtient

$$(a \pm \sqrt{x^2+y^2})^2 = r^2 - z^2 ;$$

c'est l'équation du tore à directrice circulaire.

§ 73.

Dérivée et Différentielle des Surfaces.

Soit $s = F(x,y)$, et $s' = F(x+\Delta x, y+\Delta y)$, si nous désignons par $\Delta_x s$, et $\Delta_y s$ les accroissements partiels de s, dus aux accroissements respectifs Δx, Δy, il est clair que si dans l'expression $s+\Delta_x s$, on change s en $s+\Delta_y s$, on aura pour s' la valeur

$$s' = s + \Delta_x s + \Delta_y s + \Delta_y(\Delta_x s).$$

L'accroissement de s, dû aux accroissements simultanés Δx, Δy sera par conséquent

$$\Delta\sigma = \Delta_y(\Delta_x s).$$

Soit maintenant une Surface quelconque S, déterminée par l'équation $f(x,y,z)=0$, dans laquelle x et y expriment les variables indépendantes; il est clair que S pourra être considéré comme une fonction de x et de y, et par conséquent l'accroissement de cette Surface, dû aux accroissements simultanés Δx, et Δy des deux variables indépendantes x et y, pourra être représentée par la formule ci-dessus

$$\Delta\sigma = \Delta_y(\Delta_x s). \qquad (1)$$

Il est facile de construire géométriquement l'accroissement $\Delta\sigma$. En effet, prenons sur la Surface S un point $M(x,y,z)$; par les extrémités des abscisses x, $x+\Delta x$, menons deux parallèles à l'axe des y, puis par les extrémités des abscisses y, $y+\Delta y$, tirons deux autres droites parallèles à l'axe des x. Ces deux couples de parallèles se couperont suivant un rectangle qui aura pour aire le produit $\Delta x \cdot \Delta y$. Si nous prenons ce rectangle pour base d'un parallélipipède droit P, celui-ci coupera la Surface S suivant un quadrilatère courbe, qui sera l'accroissement $\Delta\sigma$ de la Surface, correspondant au point M.

Si nous concevons un plan tangent au point M de la Surface, le même parallélipipède P coupera ce plan suivant un quadrilatère plan $\Delta\sigma'$, qui aura pour projection sur le plan des x,y le même rectangle $\Delta x\,\Delta y$, base du parallélipipède P. Soit ω l'angle que le plan tangent en M fait avec l'axe des x, on aura évidemment

$$\Delta x \cdot \Delta y = \Delta\sigma' \cdot \cos\omega,$$

d'où :

$$\Delta\sigma' = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{1}{\cos\omega}. \qquad (2)$$

x et y étant les variables indépendantes, on pourra poser $y=\varphi\nu$, $y=\psi\nu$, φ et ψ désignant des fonctions arbitraires, et ν une variable indépendante telle que l'accroissement $\Delta\nu$ de ν amène les accroissements Δx et Δy des variables x et y. On a donc, par le Théorème de Taylor :

$$\frac{\Delta_x S}{\Delta\nu} = \left(\frac{dS}{dx}\right)\frac{dx}{d\nu} + \Delta\nu\cdot P = u,$$

$$\frac{\Delta_y}{\Delta\nu}\left(\frac{\Delta_x S}{\Delta\nu}\right) = \frac{\Delta_y u}{\Delta\nu} = \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{d\nu} + \Delta\nu\cdot Q$$

$$= \frac{d\left[\left(\frac{dS}{dx}\right)\frac{dx}{d\nu} + \Delta\nu\cdot P\right]}{dy}\cdot\frac{dy}{d\nu} + \Delta\nu\cdot Q$$

$$= \left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)\frac{dx}{d\nu}\cdot\frac{dy}{d\nu} + \Delta\nu\cdot R.$$

On a donc aussi :

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\nu^2} = \left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)\frac{dxdy}{d\nu^2} + \Delta\nu\cdot R. \qquad (3)$$

Mais on a aussi :

$$\frac{\Delta x}{\Delta\nu} = \frac{dx}{d\nu} + \Delta\nu\cdot k, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta\nu} = \frac{dy}{d\nu} + \Delta\nu\cdot k',$$

et par conséquent

$$\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\Delta\nu^2} = \frac{dx\cdot dy}{d\nu^2} + \Delta\nu\cdot H.$$

On obtient donc, par l'équation (2) :

$$\frac{\Delta\sigma'}{\Delta\nu^2} = \left[\frac{dxdy}{d\nu^2} + \Delta\nu\cdot H\right]\cdot\frac{1}{\cos\omega}. \qquad (4)$$

Mais on a évidemment $\Delta\sigma > \Delta\sigma'$, donc aussi $\frac{\Delta\sigma}{\Delta\nu^2} > \frac{\Delta\sigma'}{\Delta\nu^2}$. De plus, ces deux rapports seront évidemment égaux pour $\Delta\nu=0$, on peut donc poser :

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\nu^2} = \frac{\Delta\sigma'}{\Delta\nu^2} + \Delta\nu\cdot L, \qquad (5)$$

le terme $\Delta\nu\cdot L$ disparaissant pour $\Delta\nu=0$.

En ayant égard aux équations (3) et (4) l'équation (5) devient :

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)\frac{dxdy}{d\nu^2} + \Delta\nu\cdot R = \left[\frac{dxdy}{d\nu^2} + \Delta\nu\cdot H\right]\cdot\frac{1}{\cos\omega}.$$

Si nous posons $\Delta\nu = 0$, dans cette expression, on aura, après la suppression du dénominateur commun $d\nu^2$:

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)dxdy = \frac{1}{\cos\omega}\cdot dxdy = d\sigma\,; \qquad (a)$$

on aura de plus :

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right) = \frac{1}{\cos\omega} = \frac{d\sigma}{dxdy}. \qquad (b)$$

Les expressions $d\sigma$, et $\frac{d\sigma}{dxdy}$, se nomment respectivement la différentielle, et la dérivée de la Surface $S = f(x, y, z) = 0$, correspondant au point $M(x, y, z)$.

Il ne reste plus qu'à chercher l'expression de $\cos\omega$ en fonction des coordonnées du point $M(x, y, z)$ de la Surface $f(x, y, z) = 0$.

Or, le plan tangent en M a cette Surface a pour équation :

$$\left(\frac{df}{dz}\right)(z'-z) + \left(\frac{df}{dy}\right)(y'-y) + \left(\frac{df}{dx}\right)(x'-x) = 0.$$

On a donc :

$$\cos\omega = \frac{\left(\frac{df}{dz}\right)}{\sqrt{\left\{\left(\frac{df}{dz}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2\right\}}};$$

Si nous divisons, haut et bas, par $\left(\frac{df}{dz}\right)$, on aura encore :

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}.$$

Cette valeur fera changer les expressions (a) et (b) en celles-ci :

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)dxdy = dxdy\sqrt{\left\{1 + \frac{dz^2}{dy^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right\}}. \qquad (a')$$

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right) = \sqrt{\left\{1 + \frac{dz^2}{dy^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right\}}. \qquad (b')$$

1re *Remarque.* Le 1er membre de l'équation (a') peut s'écrire de cette manière

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)dxdy = \frac{d\left(\frac{dS}{dx}dx\right)}{dy}dy.$$

Soit $\frac{dS}{dx}dx = u$, on aura

$$\frac{du}{dy}dy = du, \quad \text{donc} \quad \int \frac{du}{dy}dy = u.$$

Il suit de là que l'intégrale partielle de $(\frac{d^2S}{dxdy})dxdy$, prise par rapport à y est $\frac{dS}{dx}dx = u = dS$. On a donc aussi

$$\int \frac{dS}{dx}dx = S.$$

Il suit de là que pour obtenir l'aire indéfinie S de la Surface donnée il faut intégrer l'expression (a') d'abord par rapport à y, ajouter une constante arbitraire au résultat obtenu, puis intégrer de nouveau par rapport à x. On pourra aussi intervertir cet ordre d'intégration, et prendre la 1re intégrale partielle par rapport à x, et la subséquente par rapport à y. Cela provient de ce qu'on a généralement

$$\frac{d(\frac{dS}{dx}dx)}{dy}dy = \frac{d(\frac{dS}{dy}dy)}{dx}dx.$$

Ces deux modes d'opérations seront indiqués par le Symbole

$$\left.\begin{aligned} S &= \int dx \int dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dy^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} \\ &= \int dy \int dx \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dy^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} \end{aligned}\right\} = \iint \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dy^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} \cdot dxdy. \quad (c)$$

La formule (c) renferme la règle pour la *quadrature indéfinie* des Surfaces.

2me *Remarque.* Le cylindre qui projette la Surface S sur le plan des xy rencontre ce plan suivant une courbe

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad (1)$$

qui sera la projection de S sur ce plan.

Soient $y_0 = \psi x$, $y_1 = \xi x$, la plus petite, et la plus grande des valeurs de y déduites de l'équation (1) pour la même valeur de x, il est clair que

$$\frac{dS}{dx}dx = dx \int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dy^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}, \qquad (2)$$

sera l'intégrale partielle définie de S, dans le sens de y, prise entre les limites y_1 et y_0. Si l'on pose

$$\int dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dy^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} = F(x, y),$$

on aura

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dy^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} = F(x, \xi x) - F(x, \psi x) = f(x).$$

En supposant les axes rectangulaires, les tangentes à la courbe (1), parallèles à l'axe des x seront perpendiculaires à ce dernier axe, et les abscisses $x_0 < x_1$ des points où elles rencontreront cet axe seront évidemment les limites entre lesquelles on devra intégrer dans le sens de x l'intégrale (2), pour en déduire l'intégrale définie totale de la Surface S. On aura donc pour cette intégrale définitive

$$S = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dy^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} = f(x_1) - f(x_0).$$

Pour trouver les valeurs de x_0, x_1, il est clair qu'il faudra déduire de l'équation (1) la valeur de $\frac{dy}{dx}$, et chercher la plus petite et la plus grande des valeurs de x qui satisfont à l'équat. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{0}$, ou à la suivante $\frac{dx}{dy} = 0$.

3^me^ *Remarque.* Ces procédés généraux pour la quadrature des Surfaces se simplifient dans des cas particuliers, et notamment quand S est une Surface cylindrique ou de révolution.

A. Quadrature des Surfaces cylindriques.

Si S représente une Surface cylindrique, on pourra la concevoir rapportée à un système d'axes rectangulaires tel, que l'un de ces axes, par exemple, l'axe des y soit parallèle à la génératrice rectiligne de S.

Dans ce cas on aura évidemment $(\frac{dz}{dy}) = 0$, par conséquent les formules (a') et (b') deviendront :

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)dx\,dy = dx\,dy\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}},$$

$$\frac{d^2S}{dxdy} = \sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}.$$

Si l'on veut obtenir une portion S' de la Surface S comprise entre deux Surfaces cylindriques dont les traces sur le plan des x, y, ont pour équations

$$y_0 = \psi x, \quad y_1 = \varphi x, \quad y_0 < y_1,$$

et entre les plans tangents $x = x_0$, $x = x_1$ de la Surface S, on devra écrire

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}.$$

Les valeurs des limites x_0, x_1, devront se déduire de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dx}$ étant tirée de l'équation donnée $F(x,z) = 0$ de la Surface S.

B. Quadrature des Surfaces de révolution.

Si nous prenons l'axe des x pour l'axe de révolution, et $Y = fx$, pour la courbe génératrice, l'équation de la Surface engendrée par la courbe $Y = fx$, tournant autour de l'axe des x, aura pour équation

$$y^2 + z^2 = Y. \qquad (1)$$

De cette équation, qui donne $z = \sqrt{\{Y^2 - y^2\}}$, on déduit

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{Y.\frac{dY}{dx}}{z}, \qquad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-y}{z};$$

par conséquent la formule générale (a') devient :

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)dx\,dy = dx\,dy \cdot \frac{Y}{z}\sqrt{1+\frac{dY^2}{dx^2}}.$$

Si l'on prend la portion S' de S s'étendant dans le sens des y depuis $y = 0$, jusqu'à $y = Y$, et dans le sens des x depuis $x = x_0$, jusqu'à $x = x_1$, on écrira :

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^{Y} dy \cdot \frac{Y}{z} \sqrt{1 + \frac{dY^2}{dx^2}}.$$

1re *Remarque.* La quadrature des Surfaces de révolution peut être exprimée par une formule qui n'exige qu'une seule intégration. En effet, soit $y = fx$ la courbe qui en tournant autour de l'axe des x, engendre la Surface de révolution indéfinie S. Si x devient $x + \Delta x$, l'arc s qui répond à l'ordonnée y, augmentera de Δs. Soit Δc la corde de cet arc, on pourra poser

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta x} - \Delta x \cdot P.$$

La corde Δc engendrera la Surface latérale d'un cône tronqué dont l'aire sera

$$\Delta T = \frac{[2\pi y + 2\pi(y + \Delta y)] \cdot \Delta c}{2};$$

donc

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = 2\pi \left\{ y + \tfrac{1}{2}\Delta y \right\} \cdot \frac{\Delta c}{\Delta x}$$

$$= 2\pi \left\{ y + \tfrac{1}{2}\Delta y \right\} \left\{ \frac{\Delta s}{\Delta x} - \Delta x \cdot P \right\}.$$

La Surface S, quand x croît de Δx, croîtra de ΔS, et l'on aura $\Delta S > \Delta T$. On peut donc poser

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\Delta T}{\Delta x} + \Delta x \cdot Q; \qquad \text{donc aussi :}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = 2\pi \left\{ y + \tfrac{1}{2}\Delta y \right\} \left\{ \frac{\Delta s}{\Delta x} - \Delta x \cdot P \right\} + \Delta x \cdot Q.$$

Mais on a, par le Théorème de Taylor

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{dS}{dx} + \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} \cdot R, \qquad \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} + \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} \cdot R_1.$$

Donc l'équation précédente peut s'écrire :

$$\frac{dS}{dx} + \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} R = 2\pi \left\{ y + \tfrac{1}{2}\Delta y \right\} \left\{ \frac{ds}{dx} + \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} R_1 - \Delta x \cdot P \right\} + \Delta x \cdot Q.$$

Si nous faisons $\Delta x = dx = 0$, ce qui donne $\Delta y = 0$, nous aurons :

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi y \cdot \frac{ds}{dx}, \qquad \text{ou} \qquad dS = 2\pi y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx.$$

On a donc, en intégrant :

$$S = 2\pi \int y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx.$$

Si l'on prend cette intégrale de $x=a$, à $x=b$, $b > a$, il vient, pour la Surface définie S' :

$$S' = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx.$$

2^me^ *Remarque.* En coordonnées polaires on a $y = r\sin\theta$, $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$, donc

$$S = 2\pi \int r \sin\theta \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2},$$

$$S' = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} r \sin\theta \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

§ 74.

Différentielle des Solides.

Soit S une fonction de x, y, et z, si nous changeons x en $x + \Delta x$, S deviendra $S + \Delta_x S$; changeons dans le résultat y en $y + \Delta y$, alors S devenant $S + \Delta'_y S$, l'expression $S + \underline{\Delta}_x S$ deviendra $S + \underline{\Delta}_y S + \underline{\Delta}_x (S + \underline{\Delta}_y S) = S + \underline{\Delta}_y S + \underline{\Delta}_x S + \underline{\Delta}_x \underline{\Delta}_y S$. ($\alpha$)

Si nous changeons enfin z en $z + \underline{\Delta} z$, S devenant alors $S + \underline{\Delta}'_z S$, il est clair que l'expression (α) deviendra :

$$S + \Delta_z S + \Delta_y (S + \Delta_z S) + \Delta (S + \Delta_z S) + \Delta_x \Delta_y (S + \Delta_z S) =$$
$$S + \Delta_z S + \Delta_y S + \Delta_y \Delta_z S + \Delta_x S + \Delta_x \Delta S + \Delta_x \Delta_y S + \Delta_x \Delta_y \Delta_z S.$$

Cette expression exprime la variation totale S' de S. Elle se compose de la fonction primitive S, des accroissements partiels

$$\Delta_x S,\ \Delta_y S,\ \Delta_z S,\ \Delta_x \Delta_y S,\ \Delta_x \Delta_z S,\ \Delta_x \Delta_z S,\ \Delta_y \Delta_z S,$$

et de l'accroissement $\Delta_x \Delta_y \Delta_z S$ dû aux accroissements simultanés Δx, Δy, Δz des trois variables dont se compose la fonction S. Désignons par $\Delta\sigma$ ce dernier accroissement, on aura :

$$\left.\begin{aligned} \Delta\sigma &= \Delta_x \Delta_y \Delta_z S \\ &= \Delta_z \Delta_y \Delta_x S. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Soit maintenant S la solidité d'un corps terminé par une Surface dont l'équation est $F(x,y,z)=0$. Nous pourrons considérer S comme une fonction de x,y,z. Si donc nous désignons par $\Delta\sigma$ l'accroissement de S dû aux accroissements simultanés Δx, Δy, Δz, on aura, par la formule (1)

$$\Delta\sigma = \Delta_z \Delta_y \Delta_x S. \qquad (2)$$

Mais x et y étant les variables indépendantes on pourra poser $x=\varphi\nu$, $y=\psi\nu$, φ et ψ désignant des fonctions arbitraires, et l'on aura par suite $z=\xi\nu$, cette valeur de z devant être déduite de l'équation

$$F(x,y,z) = F(\varphi\nu, \psi\nu, z) = 0.$$

Nous supposerons en conséquence que x,y,z, deviennent $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, quand ν devient $\nu+\Delta\nu$. On a donc, par la Formule de Taylor :

$$\frac{dS}{\Delta\nu} = \left(\frac{dS}{dx}\right)\frac{dx}{d\nu} + \Delta\nu \cdot P = u,$$

$$\frac{\Delta_y u}{\Delta\nu} = \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{d\nu} + \Delta\nu \cdot P_1$$

$$= \frac{d\left[\left(\frac{dS}{dx}\right)\frac{dx}{d\nu} + \Delta\nu \cdot P_1\right]}{dy} \cdot \frac{dy}{d\nu} + \Delta\nu \cdot P_1$$

$$= \left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)\frac{dx}{d\nu}\cdot\frac{dy}{d\nu} + \Delta\nu \cdot P_2 = w.$$

$$\frac{\Delta_z w}{\Delta\nu} = \left(\frac{dw}{dz}\right)\frac{dz}{d\nu} + \Delta\nu \cdot Q$$

$$= \frac{d\left[\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)\frac{dx}{d\nu}\cdot\frac{dy}{d\nu} + \Delta\nu \cdot P_2\right]}{dz} \cdot \frac{dz}{d\nu} + \Delta\nu \cdot Q$$

$$= \left(\frac{d^3S}{dxdydz}\right)\frac{dxdydz}{d\nu^3} + \Delta\nu \cdot R.$$

Mais on a :

$$\frac{\Delta_z w}{\Delta\nu} = \frac{\Delta_z \frac{\Delta_y \frac{\Delta_x S}{\Delta\nu}}{\Delta\nu}}{\Delta\nu} = \frac{\Delta_z \frac{\Delta_y \frac{\Delta_x S}{\Delta\nu}}{\Delta\nu}}{\Delta\nu} = \frac{\Delta_z \Delta_y \Delta_x S}{\Delta\nu^3},$$

on a donc

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\nu^3} = \frac{\Delta_x\Delta_y\Delta_z S}{\Delta\nu^3} = \left(\frac{d^3S}{dxdydz}\right)\frac{dxdydz}{d\nu^3} + \Delta\nu\cdot R. \qquad (3)$$

Mais l'accroissement $\Delta\sigma$ du solide S dû aux accroissements simultanés $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, est évidemment un parallélipipède droit, dont les trois arêtes adjacentes ont pour valeurs ces derniers accroissements, on a donc aussi

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\nu^3} = \frac{\Delta x}{\Delta\nu}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta\nu}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta\nu}. \qquad (4)$$

Mais on a :

$$\frac{\Delta x}{\Delta\nu} = \frac{dx}{d\nu} + \Delta\nu\cdot k,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta\nu} = \frac{dy}{d\nu} + \Delta\nu\cdot k_1,$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta\nu} = \frac{dz}{d\nu} + \Delta\nu\cdot k_2.$$

En multipliant ces trois équations, on aura pour produit un résultat de la forme

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\nu^3} = \frac{\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z}{\Delta\nu^3} = \frac{dx\cdot dy\cdot dz}{d\nu^3} + \Delta\nu\cdot R_1. \qquad (5)$$

En comparant les équations (3) et (5), on en déduit :

$$\left(\frac{d^3S}{dx\,dy\,dz}\right)\frac{dx\,dy\,dz}{d\nu^3} + \Delta\nu\cdot R = \frac{dx\,dy\,dz}{d\nu^3} + \Delta\nu\cdot R_1 = \Delta\sigma.$$

On appelle différentielle du solide ou volume S, l'expression $d\sigma$ dans laquelle se change $\Delta\sigma$, quand on pose $\Delta\nu = d\nu = 0$. Donc l'équation précédente donnera, pour cette expression :

$$\left(\frac{d^3S}{dx\,dy\,dz}\right)dx\,dy\,dz = dx\cdot dy\cdot dz = d\sigma. \qquad (a)$$

1re *Remarque.* Le premier membre de l'équation (*a*) peut s'écrire ainsi :

$$\left(\frac{d^3S}{dx\,dy\,dz}\right)dx\,dy\,dz = \frac{d\left(\frac{dS}{dx}\,dx\right)}{d\left[\frac{\quad}{dy}dy\right]}\,dz.$$

Donc, en intégrant par rapport à z, on aura

$$d\frac{\left(\frac{dS}{dx}dx\right)}{dy}dy\,;$$

en intégrant ce résultat par rapport à y on aura

$$\frac{dS}{dx}dx\,;$$

et enfin, en intégrant ce nouveau résultat par rapport à x, on aura S. Ces trois intégrations consécutives nécessaires pour obtenir S seront indiquées par le symbole

$$S=\int dx\int dy\int dz=\iiint dx\,dy\,dz\,.$$

Cette formule renferme la règle pour la *cubature indéfinie* des solides.

2^me^ *Remarque.* Cherchons la cubature définie du Solide entier S, terminé par la Surface

$$F(x,y,z)=0. \qquad (\beta)$$

Soit z_0 la plus petite, z_1 la plus grande des valeurs de z tirées de l'équation (β), et soient

$$z_0=\varphi(x,y),\ z_1=\psi(x,y),$$

on aura, pour l'intégrale définie dans le sens des z :

$$S=\int dx\int dy\int_{z_0}^{z_1}dz\,.$$

Si nous coupons le solide S par un plan $x=x$, parallèle au plan des yz, il en résultera une Section qui aura pour équation $F(x,y,z)=0$, (γ) x étant regardé comme constant. Les tangentes à cette Section parallèles à l'axe des z détermineront évidemment les limites y_0, y_1 de l'intégration définie de S dans le sens des y. Pour obtenir ces limites, il faudra déduire de l'équation (γ), x étant constant, la valeur de $\frac{dz}{dy}$, et en tirer les valeurs de z qui rendent cette expression égale à $\frac{1}{0}$. En substituant ces valeurs dans l'équation (γ), on en déduira pour y des valeurs correspondantes, fonctions de x, telles que $y_0=\chi x$, $y_1=\xi x$, qui seront les limites cherchées, et l'on aura :

$$S=\int dy\int_{y_0}^{y_1}dx\int_{z_0}^{z_1}dz\,.$$

Soit $f(x,y)=0$ (∂) l'équation de la courbe suivant laquelle le solide entier se projette sur le plan des xy. Les tangentes à la courbe (∂), parallèles à l'axe des y, rencontreront l'axe des x en des points dont les abscisses seront $x=x_0$, $x=x_1$. Il est clair, en même temps, que l'intégration dans le sens des x devra s'effectuer entre les limites x_0, x_1.

Pour déterminer ces limites il faudra chercher par l'équation (∂) la valeur de $\frac{dy}{dx}$, il est clair que x_0 et x_1 seront les valeurs de x propres à rendre $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{0}$. On a donc définitivement pour la cubature définie

$$S=\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz.$$

Différentielle des Solides de révolution.

L'expression de $d\sigma$ devient plus simple quand le solide est terminé par une Surface de révolution.

Supposons que le solide S soit engendré par l'aire d'une courbe $f(x,y)=0$, située dans le plan des x,y et tournant autour de l'axe des x. Le point $M(x,y)$ décrira un cercle dont l'aire sera πy^2. Comme x varie arbitrairement nous pouvons poser $x=\varphi\nu$, φ désignant une fonction quelconque, en sorte que x devient $x+\Delta x$ quand ν devient $\nu+\Delta\nu$. On pourra donc considérer S comme une fonction de ν, et désigner par $\Delta\sigma$ l'accroissement de S correspondant à l'accroissement $\Delta\nu$. On aura donc :

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\nu}=\frac{d\sigma}{d\nu}+\Delta\nu\cdot P.$$

Mais en désignant par C le cylindre qui a pour base πy^2 et pour hauteur x, et par ΔC son accroissement correspondant à $\Delta\nu$, on aura :

$$\frac{\Delta C}{\Delta\nu}=\pi y^2\cdot\frac{\Delta x}{\Delta\nu}=\pi y^2\left(\frac{dx}{d\nu}+\Delta\nu\cdot Q\right).$$

Mais on a manifestement

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\nu}<\frac{\Delta C}{\Delta\nu};$$

De plus, les deux rapports $\frac{\Delta\sigma}{\Delta\nu}$, $\frac{\Delta C}{\Delta\nu}$ deviennent égaux pour $\Delta\nu=0$, on pourra donc poser :

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\nu} = \frac{\Delta C}{\Delta\nu} \pm \Delta\nu\cdot R,$$

ou
$$\frac{d\sigma}{d\nu} + \Delta\nu\cdot P = \pi y^2\left(\frac{dx}{d\nu} + \Delta\nu\cdot Q\right) \pm \Delta\nu\cdot R$$

$$= \pi y^2\cdot\frac{dx}{d\nu} + \Delta\nu\cdot T.$$

De cette équation on tire enfin

$$\frac{d\sigma}{d\nu} = \pi y^2\,\frac{dx}{d\nu} \quad \text{ou} \quad d\sigma = \pi y^2 dx.$$

De cette équation on déduit par l'intégration

$$S = \pi\int y^2 dx.$$

C'est la cubature indéfinie du solide S. Si l'on veut en déduire la cubature finie ou la portion S′ du solide S comprise entre les plans $x=\alpha$, $x=\beta$, $\alpha<\beta$, il faudra écrire :

$$S' = \pi\int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx.$$

La valeur de y devra se tirer de l'équation donnée

$$f(x,y)=0.$$

FIN.

NOTES.

—

II.

Pour former les différentielles du sin. et du cos. nous avons eu recours aux formules qui donnent les développements de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$; nous aurions pu éviter l'emploi de ces expressions trigonométriques, en opérant ainsi qu'il suit :

On a trouvé :

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}\,\sin y,$$

$$e^{-y\sqrt{-1}} = \cos y - \sqrt{-1}\,\sin y;$$

en différentiant on a :

$$d\cos y + \sqrt{-1}\,d\sin y = \sqrt{-1}\,dy\,e^{y\sqrt{-1}},$$

$$d\cos y - \sqrt{-1}\,d\sin y = -\sqrt{-1}\,dy\,e^{-y\sqrt{-1}}.$$

Ajoutons, et retranchons, il vient :

$$2\,d\cos y = \sqrt{-1}\,[e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}]\,dy$$

$$d\cos y = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}[e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}]\,dy$$

$$= -\sin y \cdot dy;$$

$$2\sqrt{-1}\,d\sin y = \sqrt{-1}\,[e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}]\,dy,$$

$$d\sin y = \tfrac{1}{2}[e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}]\,dy$$

$$= \cos y\,dy.$$

II.

Nous avons donne, pag. 100, la valeur de l'intégrale définie

$$\int_x^{x+h} f'x\,dx = \int_x^{x+ndx} f'x\,dx,$$

dans l'hypothèse de $dx = 0$; donnons maintenant l'expression la plus générale de cette intégrale, savoir : pour une valeur quelconque de

$$dx = \frac{x+ndx-x}{n} = \frac{h}{n}.$$

A cet effet écrivons :

$$f(x+dx) = fx + f'x\,dx + \frac{1}{1\cdot 2} f''x\,dx^2 + \text{etc.},$$

$$f(x+2dx) = f(x+dx) + f'(x+dx)dx + \frac{1}{1\cdot 2} f''(x+dx)dx^2 + \text{etc.},$$

$$f(x+3dx) = f(x+2dx) + f'(x+2dx)dx + \frac{1}{1\cdot 2} f''(x+2dx)dx^2 + \text{etc.},$$

$$\text{etc.}, \quad = \text{etc.}$$

$$f(x+ndx) = f(x+\overline{n-1}\,dx) + f'(x+\overline{n-1}\,dx)dx + \frac{1}{1\cdot 2} f''(x+\overline{n-1}\,dx)dx^2 + \text{etc.}$$

Ajoutons, il vient :

$$f(x+ndx) - fx = \int_x^{x+ndx} f'x\,dx = dx\,[f'x + f'(x+dx) + f'(x+2dx)$$

$$+ \ldots + f'(x+\overline{n-1}\,dx] + \frac{dx^2}{1\cdot 2}\,[f''x + f''(x+dx) + f''(x+2dx)$$

$$+ \ldots + f''x+\overline{n-1}dx] + \frac{dx^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,[f'''x + f'''(x+dx) + f'''(x+2dx)$$

$$+ \ldots + f'''(x+\overline{n-1}\,dx)] + \text{etc.} \qquad (A)$$

C'est la formule générale cherchée. Si $dx = 0$, on reproduit la formule donnée pag. 100. Si dx est très-petit on pourra se borner au 1^er^ ou aux deux 1^ers^, etc. termes du 2^d^ membre, et l'on aura des formules plus ou moins approchées. Si dx est infiniment petit, on pourra négliger les termes des ordres supérieurs au 1^er^ et l'on aura encore la formule de la pag. 100, qui ne différera qu'infiniment peu de la formule exacte (A).

1^er *Remarque.* Soient $y'_0 = f'x$, $y'_1 = f'(x+dx)$, etc.
$y''_0 = f''x$, $y''_1 = f''(x+dx)$, etc.,
etc.

Faisons de plus

$$\sum_0^{n-1} y_i' = f'x + f'(x+dx) + \ldots + f'(x+\overline{n-1}\,dx)$$

$$\sum_0^{n-1} y_i'' = f''x + f''(x+dx) + \ldots + f''(x+\overline{n-1}\,dx)$$

etc.

la formule (A) pourra s'écrire de cette manière :

$$\int_x^{x+ndx} f'x\,dx = dx\left[\sum_0^{n-1} y_i'\right] + \frac{dx^2}{1\cdot 2}\left[\sum_0^{n-1} y_i''\right] + \text{etc.}$$

Mais, par le calcul des différences finies, on sait qu'en général, quand la différence constante est 1, on a

$$\sum_0^{n-1} \varphi x = \mathop{\mathrm{M}}_0^n \varphi x\,;$$

on a donc aussi :

$$\int_x^{x+ndx} f'x\,dx = \mathop{\mathrm{M}}_0^n \left\{ dx\,y_i' + \frac{dx^2}{1\cdot 2}\,y_i'' + \text{etc.} \right\}. \qquad (A')$$

Cette formule fait voir de quelle manière on passe d'une intégrale finie $\mathop{\mathrm{M}}_0^n y_i^{(p)}$, à l'intégrale définie $\int_x^{x+ndx} f'x\,dx$, dx étant quelconque. Mais quand dx est nul, ce passage est rigoureusement indiqué par la formule

$$\int_x^{x+ndx} f'x\,dx = \mathop{\mathrm{M}}_0^n \left\{ dx\,y_i' \right\}, \qquad (A'')$$

et quand dx est infiniment petit, on pourra encore se servir de la même formule, puisqu'elle ne diffère qu'infiniment peu de la formule exacte.

2^me *Remarque.* Si nous faisons, pour abréger :

$$f'x + f'(x+dx) + \ldots + f'(x+\overline{n-1}\,dx) = \sum_x^{x+\overline{n-1}dx} f'x = \mathop{\mathrm{M}}_x^{x+ndx} f'x\,,$$

$$f''x + f''(x+dx) + \ldots + f''(x+\overline{n-1}\,dx) = \sum_x^{x+\overline{n-1}dx} f''x = \mathop{\mathrm{M}}_x^{x+ndx} f''x\,,$$

etc., etc.

la formule (A) devient

$$\int_x^{x+ndx} f'x\,dx = \mathop{\mathrm{M}}_x^{x+ndx}\left\{ dx\,f'x + \frac{dx^2}{1\cdot 2}f''x + \text{etc.},\right\}$$

$$= \mathop{\mathrm{M}}_x^{x+ndx}\{\,f(x+dx) - fx\,\}$$

$$= \mathop{\mathrm{M}}_x^{x+ndx}\cdot\Delta(fx+c). \qquad (B)$$

Cette formule servira à passer de l'intégrale définie à l'intégrale indéfinie. En effet, si nous laissons les limites des intégrales arbitraires, ce qui revient à ne pas les écrire, on aura :

$$\int f'x\,dx = \mathrm{M}\cdot\Delta(fx+c)$$

$$= f(x+c), \qquad (C)$$

car les signes M et Δ se neutralisent comme indiquant des opérations contraires. La formule (C) fait voir que le signe $\int$ implique une idée de sommation. Comme on a

$$f'x\,dx = d(fx+c)$$

il vient :

$$\int f'x\,dx = \int d(fx+c).$$

Mais on a par (C) :

$\int f'x\,dx = f(x+c)$; on a donc aussi

$\int d(fx+c) = fx+c)$. Donc les signes $\int$ et d se neutralisent, et par conséquent le signe $\int$ implique aussi l'idée d'une opération contraire à la différentiation.

3^me^ *Remarque.* Faisons

$$\mathop{\mathrm{S}}_1^{n-1} i = \mathop{\mathrm{M}}_1^{n} i = 1+2+3+\text{etc.}+n-1,$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_1^{n-1} i^2 = \mathop{\mathrm{M}}_1^{n} i^2 = 1+2^2+3^2+\ldots+\overline{n-1}^2,$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_1^{n-1} i^5 = \mathop{\mathrm{M}}_1^{n} i^5 = 1+2^5+3^5+\ldots+\overline{n-1}^5,$$

etc.

Cela posé, développons dans la formule (A) les termes $f'(x+dx)$, $f'(x+2dx)$, etc., $f''(x+dx)$, $f''(x+2dx)$, etc., etc., par la Formule de Taylor, et ordonnons par rapport aux exposants croissants de dx, la formule (A) prendra cette forme :

$$\int_x^{x+ndx} f'x\,dx = dx\,f'x\cdot n + \frac{dx^2}{1\cdot 2} f''x\,[n + 2\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i] +$$

$$\frac{dx^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x\,[n + 3\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i + 3\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i^2] +$$

$$\frac{dx^4}{1\ldots 4} f^{\mathrm{v}}x\,[n + 4\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i + 6\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i^2 + 4\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i^3] + \text{etc.} +$$

$$\frac{dx^m}{1\cdot 2\ldots m} f^{(m)}x\,[n + m\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i^2 + \text{etc.} + m\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i^{m-1}] +$$

$$\text{etc.} \quad \text{(D)}$$

Mais on a aussi, par la Formule de Taylor :

$$\int_x^{x+ndx} f'x\,dx = f(x+ndx) - fx = \frac{dx}{1} f'x\cdot n + \frac{dx^2}{1\cdot 2} f''x\cdot n^2 +$$

$$\frac{dx^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x\cdot n^3 + \frac{dx^4}{1\ldots 4} f^{\mathrm{IV}}x\cdot n^4 + \text{etc.} + \frac{dx^m}{1\cdot 2\ldots m} f^{(m)}x\cdot n^m +$$

$$\text{etc.} \quad \text{(E)}$$

En comparant les formules (E) et (D) on en conclut :

$$n = n,$$

$$n^2 = n + 2\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i,$$

$$n^3 = n + 3\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i + 3\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i^2,$$

$$n^4 = n + 4\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i + 6\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i^2 + 4\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i^3,$$

$$\text{etc.,} \qquad \text{etc.}$$

$$n^m = n + m\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i^2 + \text{etc.} + m\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i^{m-1}. \qquad \text{(F)}$$

Comme on a $\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i^p = \overset{n}{\underset{1}{\mathrm{M}}} i^p$, on trouve, par des formules qu'on donne dans les traités du calcul aux différences, l'expression :

$$\overset{n-1}{\underset{1}{\mathrm{S}}} i^p = \frac{n^{p+1}-1}{p+1} - \tfrac{1}{2}(n^p - 1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}_1 p(n^{p-1} - 1) -$$

$$\tfrac{1}{4}\mathrm{B}_3\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(n^{p-3}-1) + \tfrac{1}{6}\mathrm{B}_5\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$(n^{p-5}-1) - \text{etc.,} \quad \text{(G)}$$

dans laquelle les B désignent les nombres bernouillens, savoir :

$$\mathrm{B}_1 = \tfrac{1}{6},\ \mathrm{B}_3 = \tfrac{1}{30},\ \mathrm{B}_5 = \tfrac{1}{42},\ \text{etc.,}$$

à l'aide de cette formule, qui s'arrête quand l'exposant de n devient négatif, on trouve :

$$\sum_1^{n-1} i = \tfrac{1}{2}n(n-1), \qquad \text{pour } p=1,$$

$$\sum_1^{n-1} i^2 = \tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1), \quad » \ p=2,$$

$$\sum_1^{n-1} i^3 = \tfrac{1}{4}(n-1)^2n^2, \quad » \ p=3,$$

$$\sum_1^{n-1} i^4 = \frac{(n-1)^5}{5} + \frac{(n-1)^4}{2} + \frac{(n-1)^3}{3} - \frac{n-1}{30}, \text{ pour } p=4, \text{ etc.}$$

D'après cela on a, par exemple

$$n + 5\sum_1^{n-1} i + 10\sum_1^{n-1} i^2 + 10\sum_1^{n-1} i^3 + 5\sum_1^{n-1} i^4 =$$

$$n^5 + (\frac{10}{4} - 5 + \frac{5}{2})n^4 + (\frac{20}{6} - \frac{20}{4} + 10 + \frac{5}{3} - \frac{20}{2})n^3 +$$

$$(\frac{5}{2} - \frac{30}{6} + \frac{10}{4} - 10 + \frac{30}{2} - \frac{15}{3})n^2 + (1 - \frac{5}{2} + \frac{10}{6} + 5 - \frac{20}{2} +$$

$$\frac{15}{3} - \frac{5}{30})n + (-1 + \frac{5}{2} + \frac{5}{30} - \frac{5}{3}) = n^5.$$

Remarque. La formule (F), que je regarde comme neuve, se vérifie d'ailleurs aisément; car on a :

$$n + m\sum_1^{n-1} i + \frac{m^{\underline{2}}}{1\cdot 2}\sum_1^{n-1} i^2 + \text{etc.} = n + \sum_1^{n-1}[mi + \frac{m^{\underline{2}}}{1\cdot 2} i^2 + \text{etc.}]$$

$$= n + \sum_1^{n-1}[(1+i)^m - 1 - i^m]$$

$$= n + \sum_1^{n-1}(1+i)^m - \sum_1^{n-1} i^m - \sum_1^{n-1} 1$$

$$= n + \sum_2^{n} i^m - \sum_1^{n-1} i^m - (n-1)$$

$$= n^m.$$

Je dois cette Remarque à une obligeante communication de M^r^ Bienaymé.

FIN DES NOTES.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVANT-PROPOS 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES 7

Ire PARTIE.

THÉORIE.

Ire SECTION.

DÉRIVÉES DES FONCTIONS EXPLICITES.

CHAPITRE Ier.

DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

A. Du Ier Ordre.

a. à variable indépendante.

§ 1.

Dérivées des fonctions simples. 17

§ 2.

Dérivées des fonctions composées 24

§ 3.

b. Dérivées d'une fonction à variable dépendante 27

§ 4.

Transformation des fonctions différentielles irrationnelles en expressions rationnelles. 28

B. Dérivées des ordres supérieurs 34

a. Des fonctions d'une variable indépendante. . . . . *ib*

§ 5.

Dérivées supérieures des fonctions simples . . . . . *ib.*

§ 6.

Dérivées supérieures des fonctions composées 40

§ 7.

b. Dérivées supérieures des fonctions à une seule variable dépendante . 43

Pages

§ 8.

Changement de la variable indépendante dans les expressions différentielles d'une seule variable indépendante . . 52

§ 9.

Théorèmes de Taylor et de Maclaurin. 57

Chapitre II.

Dérivées des Fonctions de plusieurs variables.

A. Du I^er^ Ordre.

§ 10.

a. Des fonctions à variables indépendantes 64

§ 11.

b. Des fonctions à variables dépendantes. 68

B. Dérivées des ordres supérieurs. 73

§ 12.

a. Des fonctions de plusieurs variables indépendantes . . . . *ib.*

§ 13.

b. Dérivées supérieures des fonctions de plusieurs variables dépendantes 77

§ 14.

Changement des variables indépendantes dans les formules différentielles de plusieurs variables indépendantes. . . 81

§ 15.

Changement des variables indépendantes dans les intégrales multiples 89

§ 16.

Théorèmes de Taylor et de Maclaurin pour les fonctions de plusieurs variables 95

§ 17.

Transformation des formules de Taylor et de Maclaurin. . . 99

§ 18.

Dérivées et différentielles des intégrales. 105

Pages.

IIme SECTION.

DÉRIVÉES DES FONCTIONS IMPLICITES OU DES ÉQUATIONS, ET TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE Ier.

DÉRIVÉES DES ÉQUATIONS.

§ 19.

(A) On donne une seule équation. 109

(B) On donne plusieurs équations 115

§ 20.

Théorèmes de Laplace et de Lagrange 118

§ 21.

Classification des équations différentielles. 130

CHAPITRE II.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

§ 22.

Équations différentielles exactes . . . . . *ib.*

§ 23.

Recherche du facteur propre à rendre les équations différentielles exactes 135

§ 24.

Séparation des variables. 139

§ 25.

Transformation des équations linéaires 144

§ 26.

Abaissement de l'ordre des équations différentielles. . . . 147

§ 27.

Transformation des équations élevées en équations linéaires. . 151

§ 28.

Élimination des constantes des équations primitives . . . 156

§ 29.

Élimination des fonctions arbitraires des équations primitives. . 158

§ 30.

Élimination des dérivées dans les équations différentielles simultanées 163

§ 31.

Transformations des équations aux différentielles partielles . . 168

Pages.

§ 32.

Développement des fonctions données par des équations différentielles 175

§ 32$_a$.

Multiplicité des valeurs des différentielles . . . . . *ib.*

II^{me} PARTIE.

APPLICATIONS ALGÉBRIQUES.

§ 33.

Vraies valeurs de $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, etc. 183

§ 34.

Maxima et minima 197

§ 35.

Développement en séries. 215

§ 36.

Décomposition des fractions rationnelles 242

§ 37.

Formule d'interpollation de Lagrange. 257

§ 38.

Équations numériques 262

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE I^{er}.

Courbes planes. 282

§ 39.

Dérivée et différentielle de l'arc 283

§ 40.

Dérivée et différentielle de l'air d'une courbe. 285

§ 41.

Expression de l'angle que la tangente et la normale en un point quelconque d'une courbe font avec l'axe des x;

Équations de la tangente et de la normale 287

Asymptotes. 298

§ 42.

Angle de contingence 304

§ 43.

Rapport entre l'accroissement des ordonnées et celui des abscisses 307

Pages.

§ 44.

Concavité et convexité 308

§ 45.

Points d'inflexion 312

§ 45bis.

Points de rebroussement. 315

§ 46.

Points conjugués 318

§ 47.

Points multiples. 319

§ 48.

Rayon de courbure 329

§ 49.

Développantes, développées 334

§ 50.

Contacts des divers ordres, et osculations 344

CHAPITRE II.

COURBES DE L'ESPACE.

§ 51.

Dérivée et différentielle de l'arc 358

§ 52.

Expressions des cosinus des angles que la tangente à la courbe fait avec les trois axes. 360

§ 53.

Équations de la tangente. 361

§ 54.

Angle de contingence 362

§ 55.

Rayon de courbure 365

§ 56.

Plan osculateur. 367

§ 57.

Angle de torsion 372

§ 58.

Plan normal 373

§ 59.

Équations de la Sectrice. 374

Pages.

§ 60.

Coordonnées du point d'intersection de la Sectrice, et du plan osculateur 376

§ 61.

Cercle osculateur 377

§ 62.

Surface polaire. 379

§ 63.

Sphère osculatrice 379

Chapitre III.

Des Surfaces.

§ 64.

Plan tangent 381

§ 65.

Normales 394

§ 66.

Plans normaux. 396

§ 67.

Courbures des Sections normales et obliques. 398

§ 68.

Sections principales. 400

§ 69.

Propriétés des Sections principales. 403

§ 70.

Ombélics 405

§ 71.

Lignes de courbure . . . . . *ib.*

§ 72.

Génération des Surfaces 407

§ 73.

Différentielles des Surfaces 414

§ 74.

Différentielle des Solides. 421

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

PAGE	LIGNE	AU LIEU DE	LISEZ
15	27	$a = \frac{1}{2m}$	$a = 1 + \frac{1}{2m}$
28	10	rationnel	linéaire.
31	26	$a + bx = -2xz + dz$ . .	$a + bx = -2xz + z^2$
52	22	$\frac{d^5y}{dv^5}$	$\frac{d^5x}{dv^5}$,
379	15	$\psi x'$	$z' = \psi x'$
388	21	paraboles.	hyperboles
405	23	. En	, en